INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

La combinatoria es una rama de las matemáticas que está íntimamente ligada a otra rama de las mismas que es la Probabilidad. Esto es debido a la más que archifamosa REGLA DE LAPLACE. Esta regla lo que nos dice es que para saber la probabilidad de que un suceso ocurra, no tengo más que dividir el número de casos que son favorables a lo que esté estudiando entre el número total de casos. Por ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de que me toquen 6 de 6 en la primitiva? Veamos. La regla de LAPLACE dice:

$$Probabilidad\ de\ un\ suceso = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ posibles}$$

Cuando juego a la primitiva relleno una combinación de 6 números escogidos entre un total de 48. Está claro que solo hay un caso en el que acierto 6 de 6 y me hago millonario. Así que, ¿cuál es la probabilidad de hacerme rico? El problema no es contar los casos favorables, sino que será contar los casos posibles. Vamos a estudiarlo como hemos hecho hasta ahora.

EJEMPLO 16: ¿De cuántas formas diferentes se puede rellenar una primitiva si tengo que escoger 6 números de entre 48?

a) Recuento directo: Te puedes morir varias veces antes de acabar de contarlos.
b) Técnicas de recuento:
    - Tengo 48 números entre los que elegir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48
    - Cojo: _ _ _ _ _ _
    - ¿Importa el orden? No. Está claro que si la combinación ganadora está compuesta por 6 números lo mismo da que yo haya marcado en el boleto el 2 antes que el 5 o al revés. Así que la combinación 1, 5, 15, 23, 34, 40 es la misma que la combinación 5, 23, 40, 34, 15, 1.
    - ¿Se pueden repetir elementos? No. Al rellenar un boleto de la primitiva tienes que escoger 6 números diferentes.
    - Estamos por tanto ante COMBINACIONES.
    - $C_{48}^{6} = \binom{48}{6} = \frac{48!}{6!\cdot(42)!} = \frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 43}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 12.271.512$ formas diferentes.

Muy bien. La combinatoria nos ha servido para saber de cuántas formas diferentes podemos rellenar un boleto de primitiva. Ahora usaremos la probabilidad para saber cuál es la probabilidad de que nos toque.

La probabilidad asigna un número a los sucesos de 0 a 1. El 0 quiere decir que es imposible que eso ocurra, mientras que el 1 quiere decir que es seguro. Así pues, si al calcular una probabilidad obtenemos un número próximo a 0, será muy difícil que lo que estemos estudiando ocurra, y al revés, si obtenemos un número muy cercano a 1 será muy probable que aquello que estamos estudiando tenga lugar. Para asignar este número entre 0 y 1 usaremos la regla de LAPLACE.

EJEMPLO 1: Tiramos un dado de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3?

a) Casos posibles: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (son todas las posibles opciones que se pueden obtener al lanzar un dado con 6 caras numeradas).
b) Casos favorables: 1. (el único caso que nos vale es que salga el número 3, por tanto solo hay un caso favorable).
c) REGLA DE LAPLACE: $P(3) = \frac{1}{6} = 0{,}167$

Si no dividimos la fracción, se puede leer que "una de cada seis veces que lancemos un dado obtendremos el número 3". Esto no quiere decir que vaya a ser exactamente así, es solo para hacernos a la idea de que es lo que podemos esperar. Eso sí, si tirásemos infinitas veces el dado (lo cual no es posible porque nuestra vida es finita), el número 3 saldría exactamente 1 de cada 6 veces.

Si miramos el número que hemos obtenido al dividir, ¿qué podemos concluir? ¿Está más próximo a 0 o a 1? Sin duda alguna está más próximo al 0, así que parece más probable que no ocurra a que sí que lo haga.

EJEMPLO 2: Tiramos un dado de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?

a) Casos posibles: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (6 casos en total)
b) Casos favorables: 2, 4, 6 (3 casos en total)
c) REGLA DE LAPLACE: $P(nº\,par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

EJEMPLO 3: Retomamos el caso de la primitiva. ¿Cuál es la probabilidad de acertar una primitiva de 6 aciertos?

a) Casos posibles: Usamos previamente la combinatoria para contarlos. En los ejemplos anteriores ha sido muy fácil hacerlo mediante conteo directo, pero en este no lo es. En total tenemos 12.271.512 formas diferentes.
b) Casos favorables: 1 caso. Solo hay una combinación de 6 números en la que aciertas todos los números.
c) REGLA DE LAPLACE: $P(acertar\ 6\ de\ 6) = \frac{1}{12271512} = 0{,}000000008149$

Dijimos que si la probabilidad da un número próximo a 0 quiere decir que es muy difícil que eso suceda. Por lo que se deduce que es prácticamente imposible que me haga millonario jugando a la lotería. Si vemos lo que dice la fracción antes de dividir podemos entender que deberíamos acertar un pleno en la primitiva después de haberla jugado 12 millones de veces (DEJAR YA DE JUGAR A LA LOTERÍA).

Este ejemplo anterior es donde se ve cuál es la relación entre la combinatoria y la probabilidad. En muchas ocasiones tendremos que utilizar la combinatoria ya sea para contar los posibles casos o los casos favorables en un experimento aleatorio.

Vamos a ver más ejemplos sencillos en los que utilizaremos la REGLA DE LAPLACE para calcular probabilidades pero será muy sencillo contar los casos y por tanto no necesitaremos utilizar la combinatoria porque nos valdrá el recuento directo.

EJEMPLO 4: Sacamos una carta al azar de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as?

a) Casos posibles: En la baraja española hay un total de 40 cartas. Tenemos por tanto 40 casos posibles.
b) Casos favorables: En una baraja española hay 4 palos. Tenemos por tanto el as de oros, el as de copas, el as de espadas y el as de bastos. 4 casos favorables en total.
c) REGLA DE LAPLACE: $P(sacar\ un\ as) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

EJEMPLO 5: Sacamos una carta al azar de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de palo de copas?

a) Casos posibles: En la baraja española hay un total de 40 cartas. Tenemos por tanto 40 casos posibles.
b) Casos favorables: Cada palo de la baraja tiene 10 cartas. As, dos tres, cuatro, cinco, seis siete, sota, caballo y rey. Hay por tanto 10 cartas del palo de copas.
c) REGLA DE LAPLACE: $P(sacar\ una\ copa) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

EJEMPLO 6: Sacamos una carta al azar de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una figura? (Consideramos que las sotas, caballos y reyes son figuras)

a) Casos posibles: En la baraja española hay un total de 40 cartas. Tenemos por tanto 40 casos posibles.
b) Casos favorables: Cada palo de la baraja tiene 3 figuras. Como hay 4 palos tenemos un total de 12 figuras en la baraja.
c) REGLA DE LAPLACE: $P(sacar\ una\ figura) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

EJEMPLO 7: Tenemos una urna que contiene 7 bolas rojas, 5 verdes y 3 azules. Extraemos una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

a) Casos posibles: Dentro de la urna hay un total de 15 bolas. Por tanto hay 15 casos posibles.
b) Casos favorables: Hay un total de 7 bolas rojas, me vale cualquiera de ellas. Hay por tanto un total de 7 casos favorables.
c) REGLA DE LAPLACE: $P(sacar\ una\ bola\ roja) = \frac{7}{15} = 0{,}467$

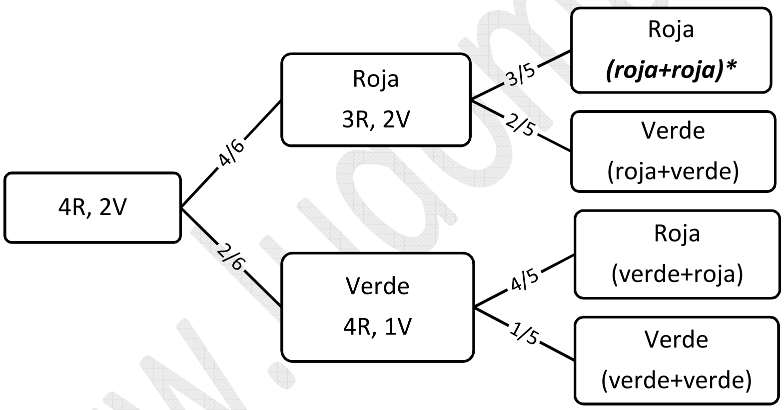
EJEMPLO 8: Tenemos una urna que contiene 7 bolas rojas, 5 verdes y 3 azules. Extraemos una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que NO sea verde?

a) Casos posibles: Dentro de la urna hay un total de 15 bolas. Por tanto hay 15 casos posibles.
b) Casos favorables: Hay 7 bolas rojas y 3 azules. Cualquiera de ellas satisface la condición de que NO sea verde. Por lo tanto hay 10 casos favorables.
c) REGLA DE LAPLACE: $P(sacar\ una\ bola\ NO\ verde) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}667$

Vamos a ir ahora un poco más allá con esta clase de experimentos. Vamos a ver qué ocurre cuando realizamos más de una elección (barajas de cartas), o más de una extracción (urnas), o más de un lanzamiento (monedas), etc. Para ello vamos a introducir un nuevo concepto que se conoce como reemplazamiento. Imagina que cogemos al azar dos cartas de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean una figura? Para responder a esta pregunta nos tendrán que especificar primero si se trata de un experimento con **REEMPLAZAMIENTO** o no. ¿Qué quiere decir eso? Si el experimento es con reemplazamiento querrá decir que al extraer la primera carta y antes de extraer la segunda volveremos a introducir la primera carta en la baraja. ¿En qué afecta eso? Al aplicar la regla de LAPLACE, si volvemos a meter la carta volveremos a tener un total de 40 cartas y un total de 12 figuras. Sin embargo, si no la reponemos tendremos un total de 39 cartas y quedarán solo 11 figuras.

Además de este concepto, también nos ayudaremos de unos gráficos característicos que se denominan árboles. A cada una de las ramas del árbol le asignaremos una probabilidad (utilizando la REGLA DE LAPLACE). La probabilidad de cada uno de los caminos del árbol la calcularemos multiplicando las probabilidades que nos encontremos en cada una de las ramas. Si varios caminos nos llevan a un resultado satisfactorio, la probabilidad final será la suma de las probabilidades de todos esos caminos (Esto último es la REGLA DE LA PROBABILIDAD TOTAL, pero ya la veremos con calma en el futuro).

EJEMPLO 9: Una urna contiene 4 bolas rojas y 2 bolas verdes. Se extrae una bola y se observa el color. Posteriormente extraemos otra bola (SIN REEMPLAZAMIENTO. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

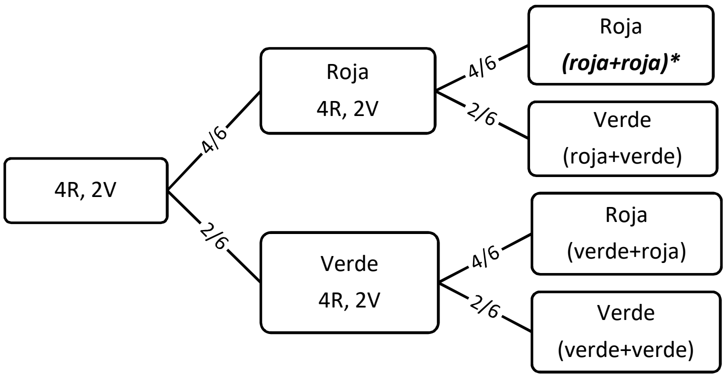


En el árbol dibujado se observa que el único camino que nos lleva a una solución favorable es el de arriba del todo. Para rellenar las probabilidades de cada rama hemos utilizado la regla de LAPLACE y hemos tenido en cuenta que al no haber reemplazamiento el número de bolas totales y de bolas rojas o verdes va cambiando en función del color de la bola extraída anteriormente.

Por lo tanto, la probabilidad de obtener dos bolas rojas es:

$$P(roja + roja) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15} = 0{,}4$$

EJEMPLO 10: Una urna contiene 4 bolas rojas y 2 bolas verdes. Se extrae una bola y se observa el color. Posteriormente la bola se vuelve a introducir en la bolsa (CON REEMPLAZAMIENTO) y se extrae una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?



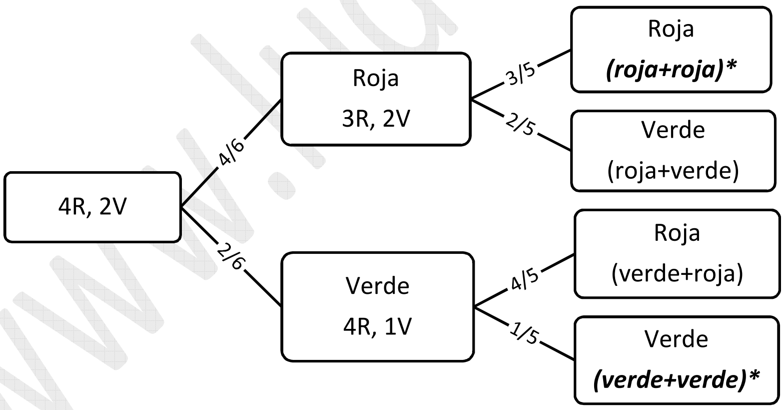
Observamos en el árbol que ahora las probabilidades entre la primera y la segunda extracción no han cambiado, ya que, como dice el enunciado volvemos a introducir la bola extraída, y por lo tanto al sacar la segunda bola sigue habiendo 6 bolas totales, 4 bolas rojas y 2 verdes.

La probabilidad de obtener dos bolas rojas en este caso será:

$$P(roja + roja) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 0{,}444$$

La probabilidad ahora es un poco mayor, ¿Por qué? Porque al sacar la primera bola roja la volvimos a meter y en el caso anterior no. Por lo tanto en la segunda extracción es ahora más fácil obtener una bola roja porque hay una más en la bolsa.

EJEMPLO 11: Una urna contiene 4 bolas rojas y 2 bolas verdes. Se extrae una bola y se observa el color. Posteriormente extraemos otra bola (SIN REEMPLAZAMIENTO. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?



Las probabilidades al ser sin reemplazamiento las rellenamos igual que en el ejemplo 9, pero en este caso, tenemos dos finales satisfactorios, porque si las dos bolas son verdes también son del mismo color. Tenemos por tanto dos caminos diferentes y usamos la REGLA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. Primero calculamos las probabilidades de cada camino como hicimos antes y luego las sumamos.

Por lo tanto, la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color será:

$$P(2\ del\ mismo\ color) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{30} + \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} = 0{,}467$$

Vamos a finalizar estudiando un caso particular del cálculo de probabilidades. El estudio de probabilidades en una **TABLA DE CONTINGENCIA**. En esta clase de ejercicios nos dan una tabla rellena con frecuencias absolutas (a veces la tendremos que rellenar nosotros a partir de los datos del enunciado), y posteriormente nos preguntarán probabilidades que resolveremos utilizando la REGLA DE LAPLACE prestando atención a lo que nos estén preguntando.

EJEMPLO 12: En una agencia de viajes sortean una estancia de fin de semana en Roma para sus 120 mejores clientes. En la siguiente tabla vemos cómo se distribuyen en función de su sexo y estado civil.

	Hombres	**Mujeres**
Casados	35	45
Solteros	20	20

a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre?
b) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a una mujer casada?
c) Si sabemos que el afortunado está casado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Lo primero que tenemos que hacer en esta clase de ejercicios es rellenar la columna y la fila de los totales.

	Hombres	**Mujeres**	**Total**
Casados	35	45	**80** **(total de casados)**
Solteros	20	20	**40** **(total de solteros)**
Total	**55** **(total de hombres)**	**65** **(total de mujeres)**	**120 TOTAL**

Ya podemos empezar a contestar a las preguntas formuladas utilizando la regla de LAPLACE.

a) En total hay 55 hombres, y el total de personas es de 120. Así que utilizando la REGLA DE LAPLACE obtenemos:

$$P(hombre) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ totales} = \frac{55}{120} = \frac{11}{24} = 0{,}458$$

b) Hay 45 mujeres casadas, y en total hay 12 personas. Usamos la REGLA DE LAPLACE

$$P(mujer\ casada) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ totales} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

c) En este apartado hay que tener cuidado. Me están diciendo que ya sabemos que está casado, así que como total de casos nos fijaremos en cuánta gente hay que esté casada, puesto que ya podemos excluir a los que no.

$$P(mujer\ si\ está\ casado) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ totales} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

EJEMPLO 13: Se sortea una entrada para un parque de atracciones entre los 80 miembros de un club. De ellos, 12 son rubios, 17 llevan gafas y 4 son rubios y llevan gafas.

a) Calcula la probabilidad de que le toque a alguien que no sea rubio y no lleve gafas.
b) Si al que le toca es rubio, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve gafas?

En este caso no me han dado la tabla rellena, así que el primer paso será rellenarla:

	Rubios	**NO rubios**	**Total**
Gafas	4		**17 (total de Gafas)**
NO gafas			**(total de NO gafas)**
Total	**12 (total de rubios)**	**(total de NO rubios)**	**80 TOTAL**

En el enunciado solo nos dan los datos que hemos reflejado en la tabla, pero rellenarla es muy sencillo. Empezamos por la fila de totales. Si el total de rubios es de 12 personas y el total de personas es de 80 está claro que podemos calcular el número de personas que no son rubias: (80 – 12 = 68). Lo mismo podemos hacer con la columna de total. Si sabemos que 17 personas llevan gafas y en total hay 80 personas, el nº de personas sin gafas será: (80 – 17 = 63).

	Rubios	**NO rubios**	**Total**
Gafas	4		**17 (total de Gafas)**
NO gafas			**63 (total de NO gafas)**
Total	**12 (total de rubios)**	**68 (total de NO rubios)**	**80 TOTAL**

Nos fijamos ahora en la primera fila. Si sabemos que en total, 17 personas tienen gafas y también sabemos que 4 de ellas son rubias, ¿cuántas personas llevan gafas y no son rubias? Al igual que antes la respuestas es bien sencilla: (17 – 4 = 13). Del mismo modo podemos proceder con la primera columna, si en total hay 12 personas rubias y 4 de ellos llevan gafas, ¿cuántos rubios no las llevan? (12 – 4 = 8). Ya solo nos quedaría una celda por rellenar y lo haremos de este mismo modo. Por tanto la tabla final queda de la siguiente forma:

	Rubios	**NO rubios**	**Total**
Gafas	4	13	**17 (total de Gafas)**
NO gafas	8	55	**63 (total de NO gafas)**
Total	**12 (total de rubios)**	**68 (total de NO rubios)**	**80 TOTAL**

Respondamos ahora a las preguntas formuladas.

a) En total hay 50 personas que no son rubias y tampoco llevan gafas, por lo tanto:

$$P(rubio\ y\ NO\ gafas) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ totales} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

b) Si ya sabemos que la persona elegida es rubio, al igual que en el ejercicio anterior, cambia cuál es el total de casos, ya que personas rubias hay 12. Me fijo por tanto exclusivamente en la columna de personas rubias.

$$P(NO\ gafas\ si\ es\ rubio) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ totales} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$