

INTRODUCCIÓN A LA COMBINATORIA

La Combinatoria es una herramienta que nos permite contar el número de situaciones que se pueden dar al someter a un conjunto finito a las acciones de ordenar y/o elegir entre sus elementos. Ej: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las 28 letras del alfabeto? ¿De cuántas formas pueden quedar ordenados los ocho corredores en una carrera de 100 metros?

Necesitamos conocer dos nuevos conceptos para poder realizar los ejercicios de combinatoria:

FACTORIAL DE UN NÚMERO

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ Ej: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Por convenio: $0! = 1$ (n natural)

NÚMEROS COMBINATORIOS

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \quad \text{Ej: } C_6^4 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!}$$

m = número de elementos que tenemos n = número de elementos que cogemos		¿Importa el orden?	
		SI	NO
¿Se pueden repetir elementos?	NO	$m \neq n$ VARIACIONES $V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots \dots \cdot (m-n+1)$ (n elementos)	COMBINACIONES $C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$
		$m = n$ PERMUTACIONES $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \dots \cdot 1$	
	SI	VARIACIONES con REPETICIÓN $VR_m^n = m^n$ Puede ocurrir que $m = n$. <u>Lo importante es que no sabemos cómo se repiten.</u>	COMBINACIONES CON REPETICIÓN $CR_m^n = C_{m+n-1}^n$
		$m = n$ PERMUTACIONES con REPETICIÓN (sabiendo cómo se repiten, r_1, r_2, r_3, \dots) $P_m^{r_1, r_2, r_3} = \frac{m!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots \dots}$	

EJEMPLO 1: ¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con las cifras impares?

- a) Recuento directo: 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35, 37, 39, 51, 53, 55, 57, 59, 71, 73, 75, 77, 79, 91, 93, 95, 97, 99. (En total 25 números)
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 3, 5, 7, 9
 - Cojo: __
 - ¿Importa el orden? Sí, $13 \neq 31$
 - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí, 11, 33, etc., pero no sé cómo se repiten (no me han dicho que tenga que haber específicamente un número de treses o de cincos).
 - El número de elementos que cogemos no coincide con el número de elementos que disponemos, se trata por tanto de VARIACIONES con REPETICIÓN.
 - $VR_{5,2} = 5^2 = 25$

EJEMPLO 2: ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con las cifras impares?

- a) Recuento directo: Demasiado largo.
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 3, 5, 7, 9
 - Cojo: ____
 - ¿Importa el orden? Sí, $1333 \neq 3331$
 - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí, 1111, 3333, etc., pero no sé cómo se repiten (no me han dicho que tenga que haber específicamente un número de treses o de cincos).
 - El número de elementos que cogemos no coincide con el número de elementos que disponemos, se trata por tanto de VARIACIONES con REPETICIÓN.
 - $VR_{5,4} = 5^4 = 625$

EJEMPLO 3: ¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con los números impares?

- a) Recuento directo: 13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39, 51, 53, 57, 59, 71, 73, 75, 79, 91, 93, 95, 97. (En total 20 números)
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 3, 5, 7, 9
 - Cojo: __
 - ¿Importa el orden? Sí, $13 \neq 31$
 - ¿Se pueden repetir los elementos? No, lo especifica el enunciado.
 - El número de elementos que cogemos no coincide con el número de elementos que disponemos, se trata por tanto de VARIACIONES.
 - $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

EJEMPLO 4: ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar con las cifras impares?

- a) Recuento directo: Demasiado largo.
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 3, 5, 7, 9
 - Cojo: _ _ _ _
 - ¿Importa el orden? Sí, $1357 \neq 7531$
 - ¿Se pueden repetir los elementos? No, lo especifica el enunciado.
 - El número de elementos que cogemos no coincide con el número de elementos que disponemos, se trata por tanto de VARIACIONES
 - $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

EJEMPLO 5: ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes se pueden formar con las cifras 1, 2, 3?

- a) Recuento directo: 123, 132, 213, 231, 312, 321 (6 números en total)
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 2, 3
 - Cojo: _ _ _
 - ¿Importa el orden? Sí, $(123 \neq 132)$
 - ¿Se pueden repetir los elementos? No, lo especifica el enunciado.
 - El número de elementos que cogemos coincide con el número de elementos de que disponemos ($n = m$). Se trata por tanto de PERMUTACIONES.
 - $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

EJEMPLO 6: ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3?

- a) Recuento directo: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333 (27 números en total).
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 2, 3
 - Cojo: _ _ _
 - ¿Importa el orden? Sí, $(123 \neq 132)$
 - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí, pero no sé cómo se repiten.
 - El número de elementos que cogemos coincide con el número de elementos de que disponemos ($n = m$), pero no sabemos cómo se repiten, así que se trata de VARIACIONES con REPETICIÓN.
 - $VR_{3,3} = 3^3 = 27$

EJEMPLO 7: ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2 de forma que el 2 se repita 2 veces?

- a) Recuento directo: 122, 212, 221 (3 números en total).
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: 1, 2, 2
 - Cojo: ___
 - ¿Importa el orden? Sí, (122 ≠ 221)
 - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí, y además sé cómo se repiten.
 - El número de elementos que cogemos coincide con el número de elementos de que disponemos ($n = m$), se trata, por tanto de PERMUTACIONES con REPETICIÓN.
 - $PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

EJEMPLO 8: ¿De cuántas formas podemos ordenar 10 libros en una estantería si los libros son diferentes?

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
 - Cojo: _____
 - ¿Importa el orden? Sí, (ABCDEFGHIJ ≠ BACDEFGHIJ)
 - ¿Se pueden repetir los elementos? No, los libros son diferentes.
 - El número de elementos que cogemos coincide con el número de elementos de que disponemos ($n = m$), se trata por tanto de PERMUTACIONES.
 - $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

EJEMPLO 9: ¿De cuántas formas podemos ordenar 10 libros en una estantería si hay 3 libros iguales de matemáticas, 5 iguales de lengua y 2 iguales de historia?

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento:
- Tengo: M, M, M, L, L, L, L, L, H, H
 - Cojo: _____
 - ¿Importa el orden? Sí, (ML..... ≠ LM.....)
 - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí, y sé cómo se repiten (3M, 4L, 2H)
 - El número de elementos que cogemos coincide con el número de elementos de que disponemos ($n = m$), se trata por tanto de PERMUTACIONES con REPETICIÓN.
 - $PR_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520$

EJEMPLO 10: En una clase con 26 alumnas, ¿De cuántas formas se puede elegir a 3 de ellas para formar parte de una comisión de festejos?

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento:
 - Tengo: 26 alumnas. ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
 - Cojo: ___ (m = 26, n = 3). Ej: ABC, MNK, etc.
 - ¿Importa el orden? No. Lo mismo me da que me elijan en primer lugar que en segundo o en tercer, formaré igualmente parte de la comisión de festejos. Por tanto, la elección ABC es igual que la elección BCA.
 - ¿Se pueden repetir elementos? No. No puedo elegir dos veces a la misma alumna.
 - El número de elementos que cogemos no coincide con el número de elementos que tenemos. Aunque si no importa el orden, esto da igual. Se trata por tanto de COMBINACIONES.
 - $C_{26}^3 = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3!(23)!} = 2600$ formas

EJEMPLO 11: En una clase con 26 alumnas, elegimos a 3 para la comisión de festejos, pero esta vez una será la presidenta, otra la secretaria y la tercera la vocal.

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento:
 - Tengo 26 alumnas
 - Cojo 3 de ellas. (m = 26, n = 3). Ej: La primera será la presidenta, la segunda la secretaria y la tercera la vocal.
 - ¿Importa el orden? Sí. No me da igual ser la presidenta que la secretaria o la vocal, cada puesto conlleva un trabajo diferente. Por tanto, la elección ABC es diferente de la elección BCA.
 - ¿Se pueden repetir elementos? No.
 - El número de elementos que cogemos no coincide con el número de elementos que tenemos. Se trata por tanto de VARIACIONES.
 - $V_{26,3} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15.600$ formas.

EJEMPLO 12: Tenemos 3 bicicletas iguales para sortear entre las 26 alumnas de una clase. ¿De cuántas formas podemos hacerlo si cada alumna solo puede llevarse una bicicleta?

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento: Estamos ante un problema igual que el ejemplo 10. Vamos a elegir 3 alumnas para darles la bici. No importa el orden (ya que las bicicletas son iguales) y no se puede repetir (una alumna no puede ganar más de una bici).

EJEMPLO 13: ¿Y si las 3 bicicletas son diferentes? (Una de montaña, una de carretera y otro de biathlon).

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento: Estamos ahora ante un problema igual que el ejemplo 11. Cuando elijamos una combinación de 3 alumnas (ABC, MJR, etc.), el orden si importará, porque no es lo mismo recibir la bicicleta de montaña que la de carretera, así que la combinación ABC, será diferente de la BCA.

EJEMPLO 14: Estamos de nuevo ante 26 alumnas y 3 bicicletas. Todas iguales. Pero supongamos esta vez que se permite que una alumna pueda ganar más de una bicicleta. ¿De cuántas formas diferentes se podrán repartir?

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento:
 - Tengo 26 alumnas: ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
 - Cojo: ___ (Una combinación de 3 letras) ($m = 26, n = 3$)
 - ¿Importa el orden? No. Lo mismo me da ABC, que BCA, porque las bicicletas son iguales.
 - ¿Se pueden repetir elementos? Sí. Hemos indicado que una alumna puede ganar dos bicicletas. AAC, FFT, etc.
 - Estamos por tanto ante COMBINACIONES con REPETICIÓN.
 - $CR_{26}^3 = C_{28}^3 = \binom{28}{3} = \frac{28!}{3!(25)!} = 3276$ formas.

EJEMPLO 15: Repetimos el experimento con 26 alumnas y 3 bicicletas. Esta vez las bicicletas vuelven a ser distintas y una alumna puede ganar más de una bicicleta. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir?

- a) Recuento directo: Te puedes morir.
- b) Técnicas de recuento:
 - Tengo 26 alumnas: ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
 - Cojo: ___ (Una combinación de 3 letras) ($m = 26, n = 3$)
 - ¿Importa el orden? Sí, no es lo mismo una bicicleta que otra, así que no es lo mismo ABC, que BCA (imagina que al primero le damos la de montaña, al segundo la de carretera y al tercero la de triathlon).
 - ¿Se pueden repetir elementos? Sí. Una alumna puede ganar más de una bicicleta, por lo que son posibles las elecciones AAC, FUU, etc.
 - Estamos, por tanto, ante VARIACIONES con REPETICIÓN.
 - $VR_{26,3} = 26^3 = 17.576$ formas.