Índice general

Capítulo 1

Geometría

1.1. Vectores en el espacio

1.1.1. Vectores libres

Definición 1.1 *Un vector $\vec{AB}$ es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B. Queda determinado por:*

a) Módulo: es la longitud de $\vec{AB}$, se designa $|\vec{AB}|$.

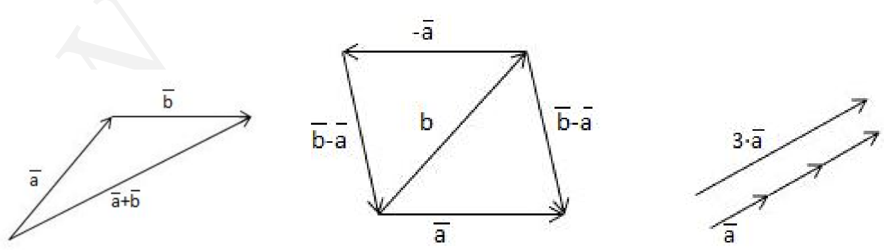
b) Dirección: es la recta que pasa por A y B.

c) Sentido: es el dado por el recorrido desde A hacia B.

Definición 1.2 *Dos vectores son equipolentes si tiene la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.*

OPERACIONES CON VECTORES LIBRES (Gráficamente)

Suma | Resta | Producto por un escalar



1.1.2. Dependencia e independencia lineal

Definición 1.3 *$\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ si existen α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.*

Un conjunto de vectores: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ es linealmente dependiente si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Equivalentemente, es linealmente dependiente si $\exists a_1, a_2, ..., a_n$ con al menos uno distinto de 0 tales que: $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + ... + a_n\vec{v_n} = 0$

Un conjunto de vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ es linealmente independiente si no es linealmente dependiente.

Observación:

Cuando hayamos definido el sistema de referencia y las componentes de los vectores lo que haremos será estudiar el rango de la matriz formada por los vectores:

- Si el rango es máximo (coincide con el n^o de vectores)$\Rightarrow$ son L.I.
- Si el rango no es máximo (no coincide)$\Rightarrow$ son L.D.

1.1.3. Bases

Definición 1.4 *Cualquier conjunto de 3 vectores linealmente independientes forman una base en $\mathbb{R}^3 \longrightarrow B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$*

Cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3}.$$

A los coeficientes a, b, c se les llama componentes de $\vec{v}$ en la base B.

- *Si $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ son perpendiculares entre si $\longrightarrow$ base ortonormal.*
- *Si $|\vec{u_1}|, |\vec{u_2}|, |\vec{u_3}| = 1 \longrightarrow$ base normada.*
- *Si la base es ortogonal y normada $\longrightarrow$ BASE ORTONORMAL.*

Obs: Nosotros vamos a trabajar siempre en una base ortonormal lo que facilitará mucho todos los cálculos o procedimientos.

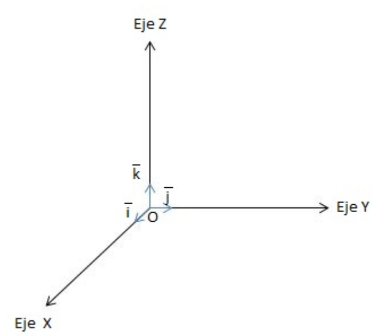
1.1.4. Sistemas de referencia

Definición 1.5 *Un sistema de referencia es un conjunto formado por un punto fijo, llamado ORIGEN, y un base de* $\mathbb{R}^3$

Nosotros trabajaremos con la BASE CANÓNICA $B_c = \left\{ \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
y como origen usaremos el punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por tanto nuestro sistema de referencia será: $R_c = \{O, B_c\}$

Obs: Los vectores son matrices de una sola columna y tantas filas como componentes tenga el vector. Esto es importante a la hora de hacer multiplicaciones matriciales y no hay que olvidarlo. No obstante, para facilitarnos la vida los solemos escribir de forma horizontal.



Ejemplo 1.1 *Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:*

NOTA: Los vectores son matrices columna y hay que tener eso en cuenta a la hora de operar con ellos, pero por comodidad muchas veces los escribiremos en linea.

a) $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,1,3)$, $\vec{c} = (1,0,1)$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 3 - 4 = 0 \Rightarrow RgM < 3 \Rightarrow \textit{son l.d.}$$

b) $\vec{a} = (1, 0, -3)$, $\vec{b} = (3, -1, 0)$, $\vec{c} = (3, 1, 2)$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 9 - 1 \neq 0 \Rightarrow RgM = 3 \Rightarrow \textit{son l.i.}$$

c) *Comprueba que los vectores:* $\vec{u_1} = (2, 1, 0)$, $\vec{u_2} = (3, -1, 0)$, $\vec{u_3} = (1, 1, 1)$ *forman una base.*

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow\Rightarrow \textit{son l.i.} \Rightarrow \textit{forman una base.}$$

d) *Halla las coordenadas de* $\vec{v} = (3, 1, 7)$ *respecto de la base del apartado anterior.*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3 & = & 2a + 3b + c \\ 1 & = & a - b + c \\ 7 & = & c \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow c = 7,\ b = \tfrac{8}{5},\ a = \tfrac{22}{5} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}_{Bc} = \begin{pmatrix} 22/5 \\ 8/5 \\ 7 \end{pmatrix}_{B}$$

1.1.5. Operaciones con vectores

En lo que sigue trabajaremos siempre con la base canónica.

Coordenadas de un vector sabiendo origen y extremo

Dados dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, el vector $\vec{u}$ que los une es:

$$\vec{u} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

"las coordenadas del punto final menos las coordenadas del punto inicial".

Módulo de un vector

Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ su módulo será (su longitud):

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

NOTA: Para conseguir un vector unitario (normalizar un vector) tan solo hay que dividirlo entre su módulo.

$$\vec{v_{unit}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Suma de vectores

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$

Resta de vectores

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix}$

Producto por un escalar

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \\ k \cdot u_3 \end{pmatrix}$

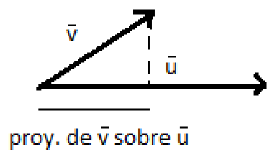
Producto escalar

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Se define el producto escalar como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\alpha$$

Como $|\vec{v}| \cdot cos\alpha$ representa el módulo de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, se tiene también que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot proyec_{\vec{v}}\vec{u}.$$



De modo que el producto escalar de dos vectores también puede definirse como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

En la base canónica con la que trabajamos se puede demostrar que resulta:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

NOTA: Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es 0.

NOTA: En la práctica es muy útil saber formar vectores perpendiculares a uno dado, para ello no tenemos más que hacer que una de las coordenadas sea 0 y las otras dos cambiarlas de orden cambiando además el signo de una de ellas.

Ej: Sea el vector $\vec{u} = (1, -2, 3)$. El vector $\vec{v} = (0, 3, 2)$ será perpendicular al vector dado ya que tal y como lo hemos construido está claro que su producto escalar será cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0.$$

Nótese que cuando trabajábamos en dos dimensiones los vectores perpendiculares a uno dado tienen todos la misma dirección pero en 3 dimensiones eso no es así.

Ejemplo 1.2 *Calcula el valor de m para que el módulo de la proyección del vector $\vec{a} = (m, 1, 1)$ sobre la dirección del vector $\vec{b} = (5, 0, -2)$ sea igual a 2.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot proyec_{\vec{a}}\vec{b} \Rightarrow proyec_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 2$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5m - 2$$

$$\frac{5m-2}{\sqrt{29}} = 2 \Rightarrow 5m = 2\sqrt{29} + 2 \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{29}+2}{5}$$

Ejemplo 1.3 *Halla el valor de b para que los vectores* $(6,0,-7)$ *y* $(b, 1+b, 3)$ *sean perpendiculares.*

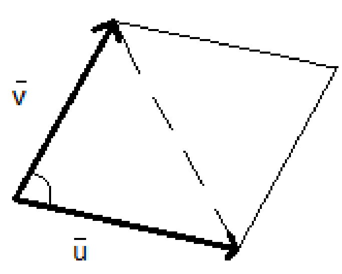
$$(6,0,-7)\cdot(b,1+b,3) = 6b - 21 = 0 \Rightarrow b = \frac{21}{6}$$

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores da como resultado otro vector perpendicular a los dos vectores dados y su sentido será igual al avance de un sacacorchos al girar del primero al segundo.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad |\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\operatorname{sen}\alpha$$

El módulo del producto vectorial (que se puede calcular con la segunda fórmula o calculando el módulo del vector resultante de la primera) da como resultado el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores y sus respectivos paralelos. La mitad de ese módulo es el área del triángulo que forman los vectores al unir sus extremos.



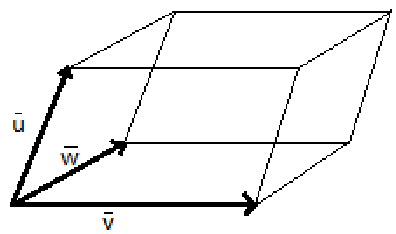
Producto mixto

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

El producto mixto da como resultado un número. El valor absoluto de dicho número es igual al volumen del paralelepípedo cuyas aristas son $\vec{u}$, $\vec{v}$

y $\vec{w}$ y las respectivas paralelas.

Un sexto de ese valor absoluto es el volumen del tetraedro que queda definido por dichos vectores.



Ejemplo 1.4 *Determina el área del triángulo cuyos vértices son los puntos* $A(1,1,3)$*,* $B(2,-1,5)$ *y* $C(-3,3,1)$*.*

$$\vec{AB} = (1,-2,2) \qquad \vec{AC} = (-4,2,-2)$$

$$A = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(0,-6,-6)|}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ u^2$$

Ejemplo 1.5 *Dados los vectores* $\vec{u} = (3,1,-1)$ *y* $\vec{v} = (2,3,4)$*, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*.*

$$A = |\vec{u}\times\vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = |(7,-14,7)| = \sqrt{294}\ u^2$$

Ejemplo 1.6 *Hallar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores* $\vec{u} = (3,-2,5)$*,* $\vec{v} = (2,2,-1)$ *y* $\vec{w} = (-4,3,2)$

$$V = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91\ u^3$$

Ejemplo 1.7 *Obtener el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos* $A(3,2,1)$*,* $B(1,2,4)$*,* $C(4,0,3)$ *y* $D(1,1,7)$

$\vec{AB} = (-2, 0, 3),\ \vec{AC} = (1, -2, 2),\ \vec{AD} = (-2, -1, 6)$

$V = \dfrac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{6} = \dfrac{5}{6}\ u^3$

1.2. Planos y rectas en el espacio

1.2.1. Punto medio de un segmento

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ los extremos del segmento AB

$$PM\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1}{2} \\[2ex] \dfrac{a_2+b_2}{2} \\[2ex] \dfrac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix}$$

1.2.2. Ecuaciones de la recta

Una recta queda definida por un punto y un vector de dirección.

$$P\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ o bien } \qquad P(p_1, p_2, p_3) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ o bien } (x, y, x) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

Ecuación paramétrica

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & p_1 + tv_1 \\ y & = & p_2 + tv_2 \\ z & = & p_3 + tv_3 \end{array} \right.$$

Ecuación continua

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Ecuación implícita

En la ecuación implícita se define la recta como la intersección de dos planos. Por tanto se expresa como las ecuaciones de dos planos. (Se verá en la sección de ecuaciones del plano).

$$r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.8 *Calcula la recta que pasa por $A(1,0,2)$ y $B(-1,2,0)$ y exprésala en todas sus formas.*

$$\vec{v} = \vec{AB} = (-2,2,-2) = (-1,1,-1)$$

a) Ec. Vecgtorial: $(x,y,z) = (1,0,2) + t(-1,1,-1)$

b) Ec. Paramétrica: $\begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & 0+t \\ z & = & 2-t \end{cases}$

c) Ec. Continua: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$

d) Ec. Implícita: $\begin{cases} x+y & = & 1 \\ y+z & = & 2 \end{cases}$

Ejemplo 1.9 *Expresa la siguiente recta en su forma implícita:*

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$$

Hacemos por un lado la primera y la segunda y luego la primera con la tercera (o cualquier otra combinación sin repetir).

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow 3x - 9 = -2y - 2 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0$$
$$\frac{x-3}{-2} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow 2x - 6 = -2z + 4 \Rightarrow 2x + 2z - 10 = 0$$
$$r : \begin{cases} 3x + 2y - 7 & = & 0 \\ 2x + 2z - 10 & = & 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.10 *Dada la recta:* $r : \begin{cases} 2x + y + z & = & 0 \\ x - 2z & = & 0 \end{cases}$

Exprésala en su forma paramétrica:

Hay varias formas para hacerlo. Las vemos:

1ª FORMA:

Elegimos una de las variables que no sea constante (a ser posible que aparezca en ambas ecuaciones). Y le asignamos un parámetro: $z = \lambda$. *A continuación escribimos las otras variables en función de* λ *resolviendo el sistema resultante.*

$x - 2\lambda = 0 \Rightarrow x = 2\lambda$
$2x + y + z = 0 \Rightarrow 4\lambda + y + \lambda = 0 \Rightarrow y = -5\lambda$

Por tanto la recta será:

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\lambda \\ y & = & -5\lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right.$$

Lo que quiere decir que la recta pasa por el punto $P_r(0,0,0)$ *y tiene de vector de dirección el vector* $\vec{v_r} = (2,-5,1)$

2ª FORMA:

Asignamos un valor a una de las variables (siempre que no sea constante). Resolvemos el sistema resultante para obtener un punto por el que pasa la recta. Por ejemplo $x = 0$.

$$\begin{array}{lcl} y + z & = & 0 \\ -2z & = & 0 \end{array} \Rightarrow z = 0,\ y = 0$$

Por lo tanto la recta pasa por el punto $P(0,0,0)$.

Repetimos la operación para otro valor de x. *Por ejemplo* $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{lcl} 2 + y + z & = & 0 \\ 1 - 2z & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = \frac{1}{2},\ y = \frac{-5}{2}$$

Por lo tanto la recta pasa por el punto $Q\left(1, \frac{-5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Como tenemos dos puntos que pertenecen a la recta podemos obtener un vector de dirección de la misma.

$$\vec{PQ} = \left(1, \frac{-5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ya podemos, por tanto, escribir la recta en su ecuación paramétrica. Vamos a elegir el segundo punto para ver las diferencias.

$$r : \begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ \\ y &= \dfrac{-5}{2} - \dfrac{5}{2}\lambda \\ \\ z &= \dfrac{1}{2}\lambda + \dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

Se ve que nos ha quedado una ecuación diferente, pero eso es porque una recta pasa por infinitos puntos y simplemente hemos escogido otro diferente. En el caso del vector de dirección resultante queda claro que ambos vectores indican la misma dirección ya que son proporcionales.

3^a FORMA:

Empezamos igual que la anterior calculando un punto que pertenezca a la recta. Ahora, sin embargo, vamos a calcular el vector de dirección de otra forma. Como tenemos los vectores normales de los dos planos cuya intersección es la recta los vamos a multiplicar vectorialmente para obtener un vector perpendicular a ambos que tendrá que ser, a la fuerza, un vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + 4\vec{j} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} = (-2, 5, -1)$$

El vector nos ha vuelto ha salir diferente pero una vez más queda claro que indica la misma dirección, así que podemos escribir la recta como:

$$r : \begin{cases} x &= -2\lambda \\ y &= 5\lambda \\ z &= -\lambda \end{cases}$$

1.2.3. Ecuaciones del plano

Un plano en $\mathbb{R}^3$ queda definido por un punto y dos vectores de dirección.

Ecuación vectorial

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{o bien}$$

$$\pi \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Ecuación paramétrica

$$\pi \equiv \begin{cases} x &= p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ecuación implícita

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \text{ donde}$$

$$\vec{n_\pi} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \text{ o bien, } \vec{n_\pi} = (A, B, C)$$

ES UN VECTOR NORMAL (perpendicular) AL PLANO π.

Ejemplo 1.11 *Calcula las ecuación paremétrica, vectorial e implícita del plano que pasa por el punto $A = (2, 2, 2)$ y que tiene como vectores directores a $\vec{u} = (0, -2, 1)$ y $\vec{v} = (3, -1, 2)$*

a) Ec. Vectorial:
$\pi \equiv (x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(0, -2, 1) + \mu(3, -1, 2)$ *o bien*

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Ec. Paramétrica:

$$\pi \equiv \begin{cases} x &= 2+3\mu \\ y &= 2-2\lambda-\mu \\ z &= 2+\lambda+2\mu \end{cases}$$

c) Ec. Implícita:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 0 & 3 & x-2 \\ -2 & -1 & y-2 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -3x+3y+6z-16=0$$

Ejemplo 1.12 *Calcula las ecuación paremétrica, vectorial e implícita del plano que pasa por los puntos* $A=(2,2,2)$ *y* $B=(1,2,-1)$ *que tiene como uno de sus vectores directores a* $\vec{u}=(-3,-2,1)$.

Lo primero es obtener otro vector director de la recta.

$\vec{AB}=(-1,0,-3)=(1,0,3)$

a) Ec. Vectorial:
$\pi \equiv (x,y,z)=(2,2,2)+\lambda(-3,-2,1)+\mu(1,0,3)$ *o bien*

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Ec. Paramétrica:

$$\pi \equiv \begin{cases} x &= 2-3\lambda+\mu \\ y &= 2-2\lambda \\ z &= 2+\lambda+3\mu \end{cases}$$

c) Ec. Implícita:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} -3 & 1 & x-2 \\ -2 & 0 & y-2 \\ 1 & 3 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -6x+10y+2z-12=0$$

Ejemplo 1.13 *Expresa el siguiente plano en su ecuación paramétrica:* $\pi \equiv x-y-2z+1=0$.

Lo único que tenemos que hacer es asignar a dos de las variables un parámetro. $y = \lambda$, $z = \mu$.

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + \lambda + 2\mu \\ y & = & \lambda \\ z & = & \mu \end{array} \right.$$

Por lo tanto el plano pasa por el punto $P_\pi(-1, 0, 0)$ *y tiene como vectores directores a* $\vec{u_\pi} = (1, 1, 0)$ *y* $\vec{v_\pi} = (2, 0, 1)$.

Ejemplo 1.14 *Halla un vector director y otro normal del plano que pasa por* $A\left(-1, 2, \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$ *y por el origen de coordenadas.*

Vectores directores podemos obtener varios. Como necesitamos dos para calcular un vector normal calculamos dos de ellos:

$\vec{OA} = \left(-1, 2, \frac{1}{3}\right)$ *y* $\vec{OB} = \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$.

Para calcular el vector normal hacemos el producto vectorial de los vectores directores.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0\right).$$

Ejemplo 1.15 *Halla la recta perpendicular al plano* $x + z = 2$ *y que pasa por el punto* $A(1, 2, 0)$.

Como el vector que se obtiene de la ecuación general del plano es precisamente perpendicular a él, ese mismo vector nos vale como vector director de la recta.La recta pedida, por tanto, será:

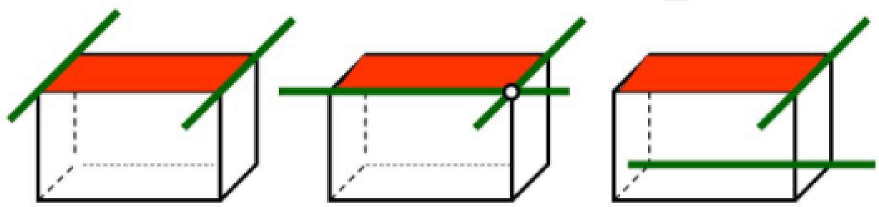
$$r : (1, 2, 0) + \lambda(1, 0, 1).$$

1.2.4. Posiciones relativas

Entre 2 rectas

$$\left. \begin{array}{ll} r : P_r(p_1, p_2, p_3) & \vec{u_r} = (u_1, u_2, u_3) \\ s : Q_s(q_1, q_2, q_3) & \vec{v_s} = (v_1, v_2, v_3) \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & | & q_1 - p_1 \\ u_2 & v_2 & | & q_2 - p_2 \\ u_3 & v_3 & | & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

RgM	$RgM*^*$	Posición
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Se cortan
2	3	Se cruzan



También se puede hacer el estudio comparando los vectores directores de las rectas:

- Vectores proporcionales $\begin{cases} \text{coincidentes} \Rightarrow P_r \in S \\ \text{paralelas} \Rightarrow P_r \notin S \end{cases}$

- Vectores no proporcionales $\begin{cases} \text{Se cortan} \\ \text{Se cruzan} \end{cases}$

NOTA: También se puede hacer el estudio con las ecuaciones ecuaciones implícitas de las rectas y con la matriz que forman sus coeficientes pero como sabremos pasar de unas ecuaciones a otras basta con aprenderse un método.

Sean las rectas:

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 &= 0 \end{cases}$$

La matriz queda ahora de la siguiente forma:

$$M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & | & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & | & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & | & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & | & -D_4 \end{pmatrix}$$

Y la tabla resultante del estudio de los rangos sería:

RgM	RgM^*	Posición
2	2	Coincidentes
2	3	Paralelas
3	3	Se cortan
3	4	Se cruzan

Ni que decir tiene que para esta forma de proceder se tiene que calcular el rango de matrices de orden superior lo que suele hacer preferible el primer método.

NOTA: Para calcular el punto de intersección de dos rectas que se cortan igualaremos un punto genérico de cada una de ellas (ecuaciones paramétricas) y resolveremos el sistema resultante.

Ejemplo 1.16 *Dadas las siguientes rectas estudia su posición relativa y calcula, en el caso de que sean secantes, el punto donde se cortan.*

$$r : \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z - 4 \qquad s : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Sabemos entonces un punto de cada recta y el vector de dirección de ambas:

$$r : \begin{cases} u_r = (3,2,1) \\ P_r(4,4,4) \end{cases} \qquad r : \begin{cases} u_s = (1,2,3) \\ P_s(0,0,0) \end{cases}$$

Formamos el vector $\vec{P_rP_s} = (-4,-4,-4)$

Y calculamos el rango de las matrices M *y* M^* *formada por los tres vectores:*

$$M^* \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & -4 \\ 2 & 2 & | & -4 \\ 1 & 3 & | & -4 \end{pmatrix}$$

El $RgM = 2$ *y el de* M^* *también ya que* $|M^*| = 0$*. Por lo tanto las rectas se cortan.*

Calculamos ahora el punto de corte, para ello escribimos las dos rectas en su forma paramétrica:

$$r:\begin{cases} x &= 4+3\lambda \\ y &= 4+2\lambda \\ z &= 4+\lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x &= \mu \\ y &= 2\mu \\ z &= 3\mu \end{cases}$$

Igualamos el punto genérico de cada recta y calculamos los valores de λ y μ.

$$r:\begin{cases} \mu &= 4+3\lambda \\ 2\mu &= 4+2\lambda \\ 3\mu &= 4+\lambda \end{cases}$$

Sabemos que es un sistema compatible determinado porque las rectas se cortan en un único punto. Sobra, por lo tanto, una ecuación. Nos aseguramos de eliminar la que no forme parte del menor de orden dos que usamos para calcular el rango de la matriz M y obtenemos los valores de λ y μ.

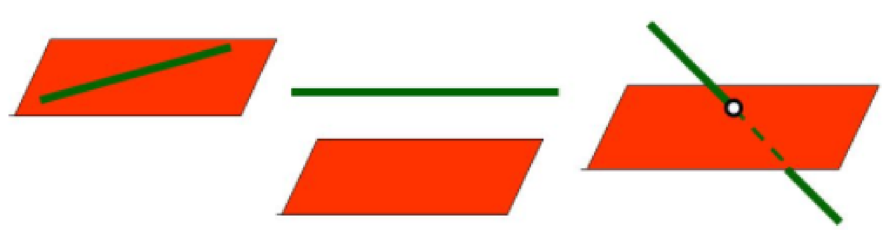
Obtenemos que $\lambda = -1$ y $\mu = 1$. Sustituimos cualquiera de los dos en sus respectivas ecuaciones paramétricas y obtenemos el punto de corte. $Q(1,2,3)$.

Entre recta y plano

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \qquad r:\begin{cases} x &= p_1+\lambda u_1 \\ y &= p_2+\lambda u_2 \\ z &= p_3+\lambda u_3 \end{cases}$$

Al sustituir un punto genérico de la recta en el plano tenemos tres opciones:

- ∞ valores de $\lambda \Rightarrow$ Recta contenida en el plano.
- 0 valores de $\lambda \Rightarrow$ Recta paralela plano.
- Un valor de $\lambda \Rightarrow$ Recta y plano se cortan.



Otro método para realizar el estudio es comparando el vector director de la recta y el vector normal al plano. ($\vec{v_r}$ y $\vec{n_\pi}$). Teniendo las siguientes opciones.

- $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \Rightarrow \begin{cases} p_r \in \pi & \text{recta contenida en el plano} \\ p_r \notin \pi & \text{recta paralela al plano} \end{cases}$
- $\vec{v_r} \not\perp \vec{n_\pi} \Rightarrow$ Recta y el plano se cortan en un punto.

NOTA: Para calcular el punto de corte entre una recta y un plano utilizaremos la ecuación implícita de la recta y la normal del plano y resolveremos el sistema resultante.

NOTA: Para variar esto se puede hacer de otra forma. Se puede coger un punto genérico de la recta (ecuación paramétrica), sustituirlo en la ecuación del plano y obtener el valor del parámetro. Por último se sustituye ese valor en la ecuación paramétrica de la recta y se obtiene el punto.

Ejemplo 1.17 *Estudia la posición relativa de la siguiente recta y plano:*

$$r : \begin{cases} x &= 2\lambda \\ y &= 1+3\lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \qquad \pi \equiv 3x + 2y - 11z - 5 = 0$$

Hacemos el producto escalar del vector director de la recta y del normal del plano:

$$(2, 3, 1) \cdot (3, 2, -11) \neq 0.$$

Por lo tanto el vector director de la recta y el normal al plano no son perpendiculares y la recta y el plano se cortan en un punto. Para calcularlo sustituimos un punto genérico de la recta en la ecuación del plano.

$$3(2\lambda) + 2(1 + 3\lambda) - 11\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

Como nos ha dado un único valor de λ con este procedimiento también hubiéramos sabido que la recta y el plano se cortaban en un punto.

Para finalizar sustituimos ese valor de λ en la ecuación de la recta y obtenemos el punto de corte. En este caso $P(6, 10, 3)$.

Ejemplo 1.18 *Estudia la posición relativa y calcula el punto de corte en caso de que se corten.*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x-2z & = & 0 \\ 3x-2y+2 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \pi \equiv 3x+2y-11z-5=0$$

Para conseguir el vector director de la recta hago el producto vectorial de los vectores normales de los planos cuya intersección la forma:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-4,-6,-2) = (2,3,1)$$

Hacemos el producto escalar del vector director de la recta y del normal del plano:

$$(2,3,1)\cdot(3,2,-11) \neq 0.$$

Por lo tanto el vector director de la recta y el normal al plano no son perpendiculares y la recta y el plano se cortan en un punto. Para calcularlo sustituimos un punto genérico de la recta en la ecuación del plano.

Como tenemos la recta en su ecuación implícita vamos ahora a calcular el punto de corte resolviendo el sistema resultante:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x-2z & = & 0 \\ 3x-2y+2 & = & 0 \\ 3x+2y-11z-5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Lo resolvemos como queramos (Cramer, Gauss, Matriz inversa, sustitución, etc.) y obtenemos el punto de corte. $P(6,10,3)$.

Entre 2 planos

$$\begin{array}{r} \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & | & D \\ A' & B' & C' & | & D' \end{pmatrix}$$

RgM	$RgM*^*$	Posición
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Se cortan en una recta

Una vez más podemos hacer el estudio comparando los vectores normales de los planos.

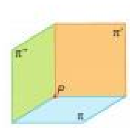
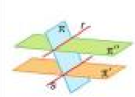
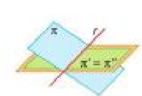
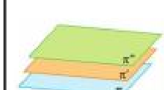
- $\vec{n}_{\perp}\vec{n}_{\pi'} \begin{cases} \text{coincidentes} \Rightarrow P_\pi \in \pi' \\ \text{paralelos} \Rightarrow P_\pi \notin \pi' \end{cases}$

- $\vec{n}_{\not\perp}\vec{n}_{\pi'} \Rightarrow$ Se cortan en una recta

NOTA: Como una de las ecuaciones de la recta es precisamente la intersección de dos planos la ecuación resultante de dos planos que se cortan es inmediata.

Entre 3 planos

Posiciones relativas de tres planos

$Rg(A)=3=Rg(A^*)$	$Rg(A)=2<3=Rg(A^*)$		$Rg(A)=2=Rg(A^*)$		$Rg(A)=1<2=Rg(A^*)$		$Rg(A)=1=Rg(A^*)$
S.C. Determinado	S. Incompatible		S.C. Indeterminado		S. Incompatible		S.C. Indeterminado
Los tres planos se cortan en un punto	Los tres planos no tienen ningún punto en común		Los tres planos se cortan en una recta (sol. sistema)		Como $Rg(A)=1$ los tres planos tienen el mismo vector normal		Los tres planos son el mismo
	Los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas formando un prisma	Dos planos son paralelos y el otro no	Dos planos son iguales y el otro secante	Los tres planos se cortan en una recta	Los tres planos son paralelos	Dos planos son el mismo y otro paralelo a ellos	
							
	Las tres filas de A son combinación lineal	Dos filas de A son proporcionales y la otra independiente	Dos filas de A^* son iguales o proporcionales y la otra independiente	Las tres filas de A^* son combinación lineal	Las tres filas de A son iguales o proporcionales	Las tres filas de A son iguales o proporcionales y dos filas de A^* son iguales o proporcionales	Las tres filas de A^* son proporcionales
	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&1\\2&5&4&7\\3&6&5&3\end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&1\\2&2&2&5\\5&-7&8&7\end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&2&3&-3\\2&4&6&-6\\-2&3&7&9\end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&2&5&3\\-3&1&2&2\\-2&3&7&5\end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&5\\1&1&1&7\\1&1&1&-8\end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&5\\1&1&1&5\\1&1&1&-8\end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&1\\2&2&2&2\\5&5&5&5\end{array}\right)$

1.2.5. Distancias

Distancia entre 2 puntos

Es el módulo del vector que los une. Dados $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Distancia punto-recta

Para el caso de distancia entre dos rectas paralelas lo que haremos será obtener un punto de una de ellas y utilizar el mismo resultado.

Sean: $r : \begin{cases} P_r(p_1, p_2, p_3) \\ \vec{v_r} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$ $\qquad Q(q_1, q_2, q_3)$

La distancia será la altura del paralelogramo determinado por $\vec{P_rQ}$ y $\vec{v_r}$

$$d(Q, r) = \frac{|\vec{P_rQ} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|}$$

Distancia punto-plano

Al igual que en el caso anterior si se trata de la distancia entre dos planos paralelos lo que haremos será obtener un punto del plano y utilizar el mismo resultado.

Sean: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ $\qquad P(p_1, p_2, p_3)$

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Es la altura del paralelepípedo determinado por $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ y $\vec{P_rP_s}$.

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{P_rP_s}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|}$$

1.2.6. Ángulos

Ángulo entre 2 rectas

Dados los vectores de dirección de dos rectas $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$

$$\alpha = arccos\left(\frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{v_s}|}\right)$$

Ángulo entre 2 planos

Dados los vectores normales de dos planos: $\vec{n_\pi}$ y $\vec{n_{\pi'}}$

$$\alpha = arccos\left(\frac{|\vec{n_\pi}\cdot\vec{n_{\pi'}}|}{|\vec{n_\pi}|\cdot|\vec{n_{\pi'}}|}\right)$$

Ángulo entre recta y plano

Dados el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\alpha = arcsen\left(\frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{n_\pi}|}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{n_{pi}}|}\right)$$

1.3. Problemas PAU

1) Dadas las rectas $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{array} \right.$ y $r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

2) Dados los puntos $A(1, 1, -2)$, $B(3, -1, 4)$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$,
se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0, 0, 0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi : z = 7$

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

3) Dados el plano $\pi : 2x + 3y - z = 4$, y las rectas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right.$
y $S : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

4) Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0,5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

5) Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 5 \\ y + z = 1 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ y + z = 4 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas:

b) (1,25 puntos) Dado el punto $P(5, 0, 1)$, de la recta r, obtener un punto Q de la recta s, de modo que el triángulo OPQ sea rectángulo, con ángulo recto en $O(0, 0, 0)$, y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.

6) Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$ se pide:

a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$, que tenga módulo $\sqrt{3}/2$ y cuya tercera coordenada sea negativa.

b) (0,5 puntos) Calcular un vector $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$ y tal que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5, 1, -1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

7) Dados el punto $A(2, 1, 0)$ y el plano $\pi : 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π mas próximo al punto A.

c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

8) Dadas la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

9) Dadas las rectas Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ y + z = 1 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

c) (1 punto) Dado el punto $A(3, 1, 0)$, de la recta s, obtener un punto B de la recta r, de modo que el vector $\vec{AB}$ sea perpendicular a la recta r.

10) Dados los puntos $A(1, 2, -3)$, $B(1, 5, 0)$, $C(5, 6, -1)$. y $D(4, -1, 3)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

b) (0,5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) (0,5 puntos) Calcular el área del triángulo definido por A, B, y C.

11) Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.

b) (0,5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\vec{SP}$ sea perpendicular a la recta r.

c) (1,5 puntos) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y los dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

12) Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar un vector $\vec{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con la tercera coordenada negativa.

b) (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

c) (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\vec{OA}$

13) Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} -x + y + 2z + 4 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 5 = 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,75 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

c) (0,75 puntos) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto P y el punto P' proyección de P sobre el plano $z = 0$

14) Se consideran los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, 1)$, $R(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos $A(0, 0, -1)$ y $B(0, 1, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de r con el plano que contiene a P, Q y R.

b) (0,75 puntos) Hallar un punto T de r, tal que los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{PT}$ sean linealmente independientes.

c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0, 0, 0)$ y los puntos P, Q y R.

15) Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{array} \right.$ y $s :$ $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

16) Dados los planos $\pi_1 : 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 : -2x-3y+6z-5=0$ se pide:

a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 : x-y+z=-2$

17) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x+y+2z-1=0$, $\pi_2 \equiv 2x-y+3z-1=0$ y la recta $r : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2t \\ y &=& -1+t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$, se pide:

a) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2.

b) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2,3,2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2.

18) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y=0$, $\pi_2 \equiv x=0$ y el punto $B(-1,1,1)$, se pide:

a) Determinar el punto B', simétrico respecto del plano π_2.

b) Obtener una ecuación de la recta r, contenida en el plano π_1, paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B.

c) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

19) Dados los puntos $P_1(1,1,3)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

a) Hallar el plano π que contiene a los puntos P_1, P_2 y P_3.

b) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x+y-z+3=0$.

c) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3.

20) Dados los planos: $\pi_1 \equiv 2x+y-z=1$ y $\pi_2 \equiv x+2y+z=3$, se pide:

a) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2.

b) Calcular la recta paralela a π_1, paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1,1,1)$.

21) Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide:

a) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

22) Sea la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

b) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r y que pasa por el punto Q.

23) Dadas las rectas $r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} 6x-y-z & = & 1 \\ 2x-y+z & = & 1 \end{array} \right.$ y $r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} 3x-5y-2z & = & 3 \\ 3x+y+4z & = & 3 \end{array} \right.$

a) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1,2,3)$.

24) Dado el punto $P(5,7,10)$ y el plano $\pi \equiv x+2y+3z=7$, se pide:

a) Calcular el punto P', simétrico de P respecto de π.

b) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1,1,1)$ y tiene dirección $\vec{v} = (-10, 2, 2)$.

c) Calcular el área del triángulo que tien por vértices a los puntos P, Q y al origen de coordenadas $O(0,0,0)$.

25) Dada la recta $r : x - 1 = y = z$, se pide:

a) Calcular la ecuación de una recta r', con dirección perpendicular a r, que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1, 2, 0)$.

b) Hallar un plano perpendicular a OXY que contenga a la recta r.

c) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0,0,0)$ a la recta r.

26) Haz lo que se indique en cada apartado:

a) Determinar la distancia entre las rectas:

$$r_1 : x = y = z \text{ y } r_2 : \begin{cases} x + y - 1 &= 0 \\ x - z + 1 &= 0 \end{cases}$$

b) Obtenga el punto de corte de la recta $s : x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s que pasa por el origen.

27) Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P, Q y la recta s, que pasa por R y S.

c) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

28) Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$ y $P(1, 1, 1)$ se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.

29) Dadas las rectas:

$$4 : \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ y } s : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+\lambda \\ y & = & 3-\lambda \\ z & = & 2 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

a) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$.

30) Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

31) Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0, 2, 1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(-1, -2, -1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntso de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

32) Dadas las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2x - 1 & = & 0 \\ x + y + z - 4 & = & 0 \end{array} \right. \text{ y } s : \{(2+\lambda, 1-3\lambda, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

a) Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

33) Dada una recta r cuyo vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ con $a, b, c > 0$, se pide:

a) Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY. determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

b) Si $\vec{v} = (1, 5, 3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3, 0, 1)$.

34) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta $r \equiv x = y - 2 = \frac{x}{2}$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto A a la recta r.

b) Hallar la proyección del punto A sobre el plano π.

35) Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & z - 1 \\ y & = & 2 - 3z \end{array} \right. \text{ y } r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4 + 5z \\ y & = & 4z - 3 \end{array} \right. \text{, se pide:}$$

a) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2.

36) Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

37) Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0{,}2, -1)$, $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

38) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

39) Dados los planos: $\pi_1 \equiv 3x+4y-5z-7 = 0$, $\pi_2 \equiv x-2y+z-3 = 0$, se pide:

a) Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) Hallar la distancia del punto $P(3,-1,2)$ al plano π.

c) Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

40) Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,1)$, se pide:

a) Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P,S) = 2d(Q,S)$.

41) Dados el plano y la recta:

$\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y $r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & 1 \\ 2x + y - z & = & 2 \end{array} \right.$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1,0,1)$.

b) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2,1,1)$.

42) Dado el vetor $\vec{v} = (1,0,-2)$, se pide:

a) Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector $\vec{v}$ y tienen alguna coordenada nula.

b) Obtener los vectores $\vec{w}$ tales que $\vec{v} \times \vec{w} = (2,-3,1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

43) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1,4,1)$ y la recta $r : x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$, se pide:

a) Hallar el seno del ángulo formado por π y r.

b) Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π.

44) Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$ y $P(1,1,1)$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B.

b) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C, sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.

45) Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos:

$\pi_1 \equiv x - z = 0$, $\pi_2 \equiv my - 6z = 0$, $\pi_3 \equiv x + y - mz = 0$, se pide:

a) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

46) La recta r pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director $(1,\lambda,-2)$. La recta s pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$.

a) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

b) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

47) Dados el plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y la recta $r : (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(2,1,0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ y es paralelo a π.

b) Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

c) Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π.

48) Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+\lambda \\ y & = & 2-2\lambda \\ z & = & 3+3\lambda \end{array}\right. \text{ y } s:\frac{x+1}{2}=y-5=-(z+2), \text{ se pide:}$$

a) Estudiar la posición relativa de r s.

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,6,-3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.

49) Dada la recta y el plano:

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} x-y+az & = & 0 \\ ay-z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \pi\equiv x+y+z-2=0, \text{ se pide:}$$

a) Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π.

b) Para $a=2$, determinar la distancia de la recta r al plano π.

c) Para $a=1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π.

50) Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4+4\lambda \\ y & = & 8+3\lambda \\ z & = & -2\lambda \end{array}\right. , \text{ se pide:}$$

a) Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) Determinar la distancia de P a r.

c) ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

51) Haz en cada apartado lo que se indique:

a) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.

b) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

52) Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{rcr} x + y - z & = & 4 \\ x - y - 3z & = & -2 \end{array} \right. , \; s : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & -3 \end{array} \right. , \text{ se pide:}$$

a) Calcular la mínima distancia entre r y s.

b) Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.

c) Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.

53) Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

b) Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π.

c) Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1.

54) Dadas las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right. , \; s : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ y & = & z \end{array} \right.$$

a) Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s y que pasa por el punto $(0,0,0)$.

55) Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0,\ r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2-2t \\ z & = & 1+t \end{array} \right.,\ \text{se pide:}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y π

b) Calcular la distancia entre r y π.

c) Obtener el punto P' simétrico de $P(3,2,1)$ respecto del plano π.

56) Dados los planos:

$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z + 2 = 0$, $\pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0$, se pide:

a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

57) Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$, se pide:

a) Calcular el área del triángulo de vértices A, B, y C.

b) Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

58) Dados el plano y la recta siguientes:

$$\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0 \text{ y } r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-8}{-3},\ \text{se pide:}$$

a) Hallar la distancia de la recta al plano.

b) Hallar la proyección del punto $P(5,-2,1)$ sobre el plano π.

c) Hallar la proyección del punto $Q(-1,7,3)$ sobre la recta r.

59) Sean los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,-4)$. Se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.

b) Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2,-1,1)$.

60) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

a) Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.

b) Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0,0,0)$ que es tangente a π.

61) Dados el plano y la recta siguientes:

$\pi \equiv 2x - y = 2$, $r : \left\{ \begin{array}{rcl} x \quad\quad & = & 1 \\ y - 2z & = & 2 \end{array} \right.$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r y es paralela a π.

62) Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ y la recta:
$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.

b) Hallar la distancia de P a r.

c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

63) Haz en cada apartado lo que se indique:

a) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2+\lambda \\ y & = & -6+2\lambda \\ z & = & 1+\lambda \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-4 & = & 0 \\ 2x+z-6 & = & 0 \end{array} \right.$$

b) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

64) Dados el punto $P(1,1,1)$ y los planos:

$\pi_1 \equiv 3x+ay+z=0$, $\pi_2 \equiv ax+y+2z=0$, $\pi_3 \equiv x+y-z=0$

a) Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.

b) Para $a=2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

c) Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.