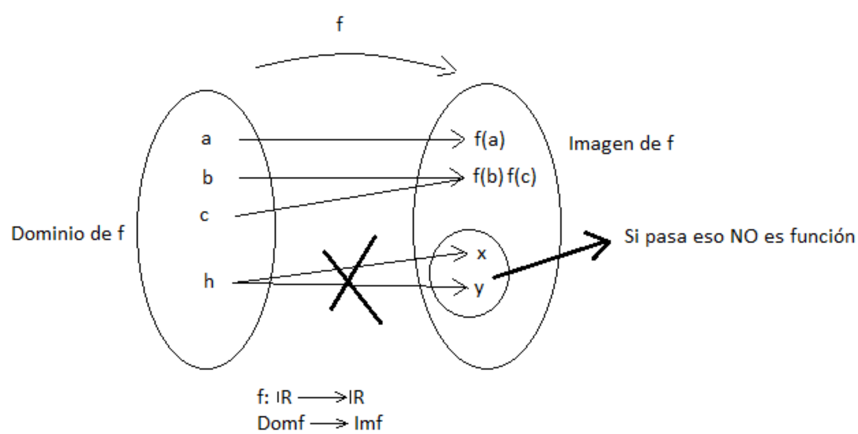
Índice general

Capítulo 1

Análisis de funciones

1.1. Dominio de una función

Definición 1.1 *Una función f es una regla que asigna a cada elemento x del espacio de partida un único elemento y del espacio de llegada.*



Ejemplo 1.1 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longrightarrow x^2$ *Usaremos la notación $f(x) = x^2$*

Ejemplo 1.2 $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$ *No es una función porque a cada valor del espacio de partida de corresponden dos elementos del espacio de llegada ya que p.e.* $\sqrt{4} = \pm 2$

Definición 1.2 *El dominio de una función f(x) es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente X.*

NOTA 1.1 *En la práctica, para calcular el dominio de una función tenemos que tener en cuenta tres cosas; los denominadores no pueden ser cero (porque no existe la división entre 0), las raíces de índice par no pueden tener radicandos negativos (porque no trabajamos con números complejos) y los argumentos de los logaritmos tienen que ser estrictamente positivos (por la definición de logaritmo).*

Dicho lo anterior así quedarían los dominios de las funciones con las que trabajaremos a lo largo de este curso:

- Funciones polinómicas: $f(x) = p(x) \Rightarrow Domf(x) = \mathbb{R}$
- Funciones racionales: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow Domf(x) = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$
- Funciones irracionales: $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$

  Si n par $\Rightarrow Domf(x) = \{x \mid p(x) \geq 0\}$
  Si n impar $\Rightarrow Domf(x) = Domp(x)$
- Funciones exponenciales: $f(x) = a^{p(x)} \Rightarrow Domf(x) = Domp(x)$
- Funciones logarítmicas: $f(x) = log_a p(x) \Rightarrow Domf(x) = \{x \mid p(x) > 0\}$
- Funciones trigonométricas:

  Si $f(x) = senp(x)$ o $cosp(x) \longrightarrow Domf(x) = Domp(x)$
  Si $f(x) = tgp(x) = \frac{senp(x)}{cosp(x)} \Rightarrow Domf(x) = \mathbb{R} - \{x \mid p(x) = 0\}$

Ejemplo 1.3 *Calculo de dominios*

a) $f(x) = x^3 + \dfrac{x}{5} \Rightarrow Domf(x) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-5} \Rightarrow x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \Rightarrow Domf(x) = \mathbb{R} - \{5\}$

c) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-4} \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow Domf(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x-3} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \sqrt{x-7} \Rightarrow x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow Dom f(x) = [7, \infty)$ *o bien* $Dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

f) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R}$

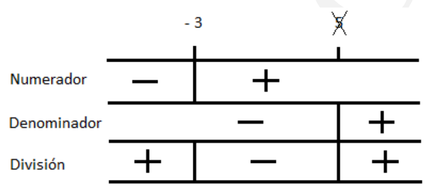
g) $f(x) = 2^{\frac{3}{x+1}} \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

h) $f(x) = Ln(x+3) \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow Dom f(x) = (-3, \infty)$ *o bien* $Dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

i) $f(x) = sen 5x \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R}$

j) $f(x) = cos \frac{3}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

k) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}} \Rightarrow \frac{x+3}{x-5} \geq 0$ *Estudiamos el signo por separado del numerador y del denominador y luego vemos cuál sería el signo de la división. Hay que tener en cuenta también que el denominador No puede ser cero, pero el numerador si.*



$Dom f(x) = (-\infty, -3] \cup (5, \infty)$ *ó* $Dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \vee x > 5\}$

l) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow Dom f(x) = (-2, \infty)$

m) $f(x) = e^{\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}} \Rightarrow Dom f(x) = Dom(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}) = (-2, \infty)$

1.2. Puntos de corte, signo y simetría

Definición 1.3 *Los puntos de corte de una función son los puntos donde la función corta al eje OX (eje de abcisas) y al eje OY (eje de ordenadas)*

Una función puede tener infinitos cortes con el eje OX y estos se calculan igualando la función a 0 (sustituyendo $f(x)$ o y por cero) y despejando la x.

Una función solo puede tener 1 corte con el eje OY, si es que lo tiene (de lo contrario no sería una función). Para calcularlo se sustituye la x por cero y se calcula la y.

Definición 1.4 *El signo de una función indica si la misma está por encima del eje OX en cuyo caso se dice que es positiva en ese intervalo o si está por debajo del eje OX en cuyo caso se dice que es negativa en ese intervalo.*

Para calcular el signo de una función dibujamos en una recta los puntos que no pertenecen al dominio de la función así como sus puntos de corte. A continuación se sustituye un valor perteneciente a cada uno de los intervalos en los que ha quedado divida la recta en la función

Ejemplo 1.4 *Calculo de puntos de corte y signo.*

a) $f(x) = \frac{x^2-2}{x-5} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{5\}$

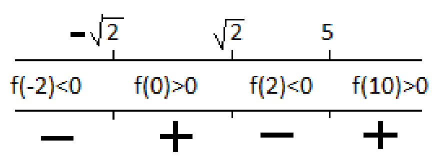
$\underline{Corte\ OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x-5} = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$P_{x_1}(\sqrt{2}, 0)$ $P_{x_2}(-\sqrt{2}, 0)$

$\underline{Corte\ OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

$P_y(0, \frac{2}{5})$

<u>Signo</u>



$f(x)$ *es positiva si* $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (5, \infty)$
$f(x)$ *es negativa si* $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 5)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-5}} \Rightarrow \frac{x}{x-5} \geq 0$

		0	$\cancel{5}$
Numerador	$-$	$+$	
Denominador		$-$	$+$
División	$+$	$-$	$+$

$Dom f(x) = (-\infty, 0] \cup (5, \infty)$

<u>*Corte OX*</u> $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x-5} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$P_x(0,0)$$

<u>*Corte OY*</u> $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{0}{-5}} = 0$ *Como solo puede tener un corte con el eje OY y nos había salido antes en realidad ya lo sabíamos.*

$$P_y(0,0)$$

<u>*Signo*</u> $\Rightarrow f(x)$ *es positiva en* $\mathbb{R}$.

NOTA 1.2 *Las raíces cuadradas (y en general las de índice par) solo son funciones si consideramos únicamente uno de sus signos. Si no aparece signo alguno delante de la raíz entonces es la positiva y por tanto el signo de esta función es siempre positivo.*

c) $f(x) = e^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R}$

<u>*Corte OX*</u> $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = e^{\frac{x+2}{3}}$ *La exponencial nunca vale 0.* $\Rightarrow$ *no corta al eje de abcisas*

<u>*Corte OY*</u> $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$

$$P_y(0, \sqrt[3]{e^2})$$

<u>*Signo*</u> $\Rightarrow f(x)$ *es positiva en* $\mathbb{R}$.

NOTA 1.3 *La función exponencial es siempre positiva. Se puede dibujar la recta y como no hay cortes con el eje OX y el dominio es* $\mathbb{R}$ *se coge cualquier valor y se ve que da positivo.*

Definición 1.5 *Se dice que:*

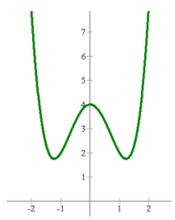
$f(x)$ tiene simetría PAR si $f(-x) = f(x)$

$f(x)$ tiene simetría IMPAR si $f(-x) = -f(x)$

Si no se cumple ninguna de las dos premisas anteriores entonces la función NO presenta simetría.

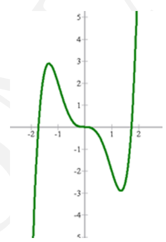
En la práctica lo que se hace es sustituir en la función x por $-x$ y ver que ocurre.

SIMETRÍA PAR



Si se dobla la gráfica por el eje Y las dos ramas de la función coinciden.

SIMETRÍA IMPAR



Si se gira 180 grados la gráfica por el origen de coordenadas la función queda igual.

1.3. Límites de una función

Definición 1.6 *Entendemos por "LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO x TIENDE A a" y se escribe:*

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

Al valor al que se acerca la función (la coordenada y) cuando la coordenada x se aproxima al punto dado "a".

Para resolver un límite sustituimos x por el valor al que me dicen que se acerca:

Ejemplo 1.5 *Resolución de límites*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{5-x} = \dfrac{2+1}{5-2} = \dfrac{3}{3} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1-1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{4-4}{2-2} = \dfrac{0}{0} =$ *INDETERMINACIÓN*

NOTA 1.4 *Con el término INDETERMINACIÓN queremos expresar que no conocemos el resultado del límite a primera vista. Posteriormente veremos diferentes estrategias para resolver los diferentes tipos de indeterminaciones que se pueden presentar.*

NOTA 1.5 *En el ejemplo c) anterior se ha escrito una división en la que el denominador es 0. NO SE PUEDE DIVIDIR ENTRE CERO. En los límites escribimos esa notación para expresar que un número tiende a 0, o sea, que se aproxima mucho a él pero en realidad nunca puede alcanzar ese valor.*

1.3.1. Propiedades de los límites

- El límite de una función existe si es único.

  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen y son finitos entonces:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, siempre y cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a}(f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to a} Ln(f(x)) = Ln\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to a} sen(f(x)) = sen\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$, esta última propiedad es igual para el coseno y la tangente.
- $\lim\limits_{x\to\infty} sen(f(x)) = \nexists$, esta última propiedad es igual para el coseno y la tangente.

NOTA 1.6 *Dentro de los límites vamos a utilizar con frecuencia el símbolo* $\pm\infty$ *(que se lee más o menos infinito). Con el queremos decir que "algo" se está haciendo desmesuradamente grande o pequeño. Así podemos estudiar el límite de una función cuando x tiene a* $\pm\infty$*, lo que quiere decir que vamos a tratar de ver hacia que valor se aproxima la función (coordenada y) cuando la x se hace muy grande (nos movemos hacia la derecha en la gráfica) o muy pequeña (nos movemos hacia la izquierda).*
También puede ocurrir que el resultado de un límite sea $\pm\infty$*. Esto quiere decir que cuando nos aproximamos mucho a un valor concreto de x entonces la función (coordenada y) toma valores extremadamente grandes (la gráfica sube) o pequeños (la gráfica baja).*

NOTA 1.7 *Cuando tengamos que resolver un límite en el que la x tienda a* $-\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$*), lo más fácil es resolver el límite como si la x tendiese*

a ∞ cambiando en la expresión de la función las x que aparezcan por $-x$.
Ejemplo: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(-x)^2-4}{-x-2}$

Teniendo en cuenta la nota anterior tenemos que tener clara la siguiente lista de posibles resultados de límites de funciones:

$a+\infty=\infty$	$\frac{a}{\pm\infty}=0$	Si $a>1$	$a^{\infty}=\infty$
$a-\infty=-\infty$			$a^{-\infty}=0$
$\infty+\infty=\infty$	$\frac{\infty}{a}=\infty$	Si $a<1$	$a^{\infty}=0$
$-\infty-\infty=-\infty$			$a^{-\infty}=\infty$

Ejemplo 1.6 *Cálculo de límites:*

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^3-9x^2+6}{x+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2} = \dfrac{2}{0} =$ *INDETERMINACIÓN*

c) $\lim\limits_{x\to0} \left(x-\dfrac{5}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-5}{x} = \dfrac{-5}{0}$ *INDETERMINACIÓN*

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right) = \infty+\infty=\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1-x}-e^x+e^{-x}\right) = \infty-0+\infty=\infty$

Ejemplo 1.7 *Cálculo de límites usando sus propiedades:*

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-2$*,* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=2$*, y* $\lim\limits_{x\to a} h(x)=2$

a) $\lim\limits_{x\to a} 2f(x)-2g(x)+h(x) = 2\cdot(-2)-2\cdot2+2=-6$

b) $\lim\limits_{x\to a} \left(\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}\right) = \sqrt{4+4} = 3\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{12}{f(x)+g(x)} = \dfrac{12}{0}$ *INDETERMINACIÓN*

d) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right) = -1-0=-1$

1.3.2. Indeterminaciones

a) $\frac{k}{0} \Rightarrow$ Se resuelven calculando los límites laterales.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Por lo tanto el límite no existe porque tienen que coincidir los límites laterales.

b) $\frac{0}{0} \Rightarrow$ Hay tres estrategias diferentes:

- Si aparecen raíces, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.
- Si no, factorizamos y simplificamos.
- L'Hopital (se verá en las aplicaciones de las derivadas).

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4-x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(2-x)(2+x)} =$
$\lim_{x\to 2} -\frac{x^2+2x+4}{2+x} = -3$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x^2-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} =$
$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2(2\sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

c) $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ Tenemos también 3 estrategias diferentes:

- Si son polinomios se comparan los grados:
  - $gr(num) > gr(denom) \Rightarrow \infty$ o $-\infty$. Para saber el signo se dividen los coeficientes de las "equis" de mayor grado de num, y denom.

- $gr(num) = gr(denom)$ Se dividen los coeficientes de las "equis" de mayor grado del numerador y denominador.
- $gr(num) < gr(denom) \Rightarrow 0$

- EXPONENCIAL>POLINOMIO>LOGARITMO
- L'Hopital

d) $\infty - \infty \Rightarrow$ Tenemos dos estrategias:

- Si aparecen raíces multiplicamos por el conjugado de la expresión tanto en el numerador como en el denominador (que será un 1).
- Si no aparecen operamos la expresión y la convertimos en una INDETERMINACIÓN del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

Ejemplo 1.8 *Resolución de la indeterminación $\infty - \infty$*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-5}) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-5})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-5})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-5})} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-5}} = \frac{6}{\infty} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2}{x-1}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(x-1)-x^2(x+1)}{x^2-1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = -2$

e) 1^∞ INDETERMINACIÓN TIPO NÚMERO e

Hay dos formas de abordar este tipo de indeterminaciones.

- Sabiendo que $e = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$ Siempre y cuando $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$ (en nuestro caso no prestaremos atención a esta apreciación). Lo que haremos será operar la expresión hasta que tengamos ese resultado.
- Utilizando que el resultado del límite será: $e^{\lim\limits_{x\to a}(base-1)\cdot exponente}$ (Esta expresión resulta del punto anterior pero se puede memorizar y facilita los cálculos).

Ejemplo 1.9 *Resolución de límites del tipo número e.*

$$1{,}1\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$1{,}2\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x-1)\dfrac{1}{x}} = e^{1} = e$$

$$2{,}1\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2x^2-1-x}{x}-1\right) =$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2x^2-1-x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left[\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2x^2-x-1}}\right)^{\frac{x}{2x^2-x-1}}\right]^{\frac{2x^2-x-1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x(x-1)}} = e^{3}$$

$$2{,}2\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-1}{x}-1\right)\dfrac{1}{x-1}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-1-x}{x}\right)\dfrac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-x}\right)} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x(x-1)}} = e^{3}$$

f) ∞^0, 0^0, $\infty^{\infty} \Rightarrow$ Utilizaremos el siguiente resultado general:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)Lnf(x)}$$

Ejemplo 1.10 *Resolución indeterminación* ∞^0

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x} = \infty^{0} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot Ln\dfrac{1}{x}} = e^{0\cdot\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{0} = 1$$

NOTA 1.8 *En el último ejemplo ha aparecido la INDETERMINACIÓN* $0\cdot\infty$*. Esta indeterminación se transforma en una del tipo* $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ *de forma inmediata utilizando los castillos de fracciones.*

NOTA 1.9 *En el último ejemplo a la hora de resolver la indeterminación* $\frac{\infty}{\infty}$ *hemos usado el orden de los infinitos que aparece en el apartado c).*

1.4. Asíntotas de una función

1.4.1. Asíntotas verticales

Una asíntota vertical es una recta paralela al eje OY, de ecuación $x = cte$ a la que la función se acerca pero nunca llega a tocarla.
Se calcula resolviendo los límites (por la izquierda y por la derecha) cuando x tiende a donde falla el dominio. Si el dominio falla en un intervalo, se calcula el límite lateral donde la función exista.
Para que haya asíntota vertical al menos uno de los límites laterales ha de ser $\pm\infty$.

$$\boxed{x = \text{donde falla el dominio es A.V.}}$$

1.4.2. Asíntotas horizontales

Una asíntota horizontal es un recta paralela al eje OX de ecuación $y = cte$ a la que la función se acerca cada vez más (sin tocarla) cuando nos movemos muy a la derecha o muy a la izquierda. Al contrario de lo que ocurre con las A.V. estas asíntotas si se pueden atravesar en tramos intermedios de la función.
Se calculan resolviendo los límites cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$ pudiendo darse el caso de que una función tenga límite por la derecha y no por la izquierda y viceversa. Para que haya asíntota horizontal al menos uno de esos límites tiene que dar como resultado un número fínito.

$$\boxed{y = \text{resultado del límite es A.H.}}$$

1.4.3. Asíntotas oblicuas

Una asíntota oblicua es una recta de ecuación $y = mx + n$ a la que la función se acerca cada vez más (sin tocarla) cuando nos movemos muy a la derecha o muy a la izquierda. Al igual que ocurre con las A.H. las asíntotas oblicuas pueden cortarse en tramos intermedios de la función.
Las asíntotas ablicuas se buscan donde no hay asíntotas horizontales.
Hay dos métodos para calcularlas:

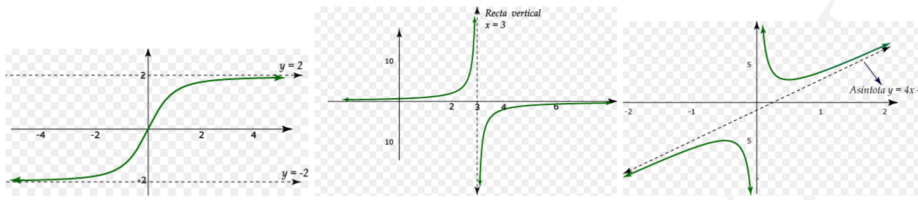
a) Método general:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

Para que exista la A.O. ambos límites deben ser números finitos.

b) Método particular para funciones racionales (división de polinomios)
Se hace la división de los polinomios y la ecuación será: $y = cociente$

GRÁFICA DE LOS TRES TIPOS DE ASÍNTOTAS



Ejemplo 1.11 *Cálculo de asíntotas:*

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

<u>*A.V.*</u>

$$\lim_{x\to 2} = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{5}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{5}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2 \ es \ A.V.}$$

$$\lim_{x\to -2} = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{5}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -2 \ es \ A.V.}$$

<u>*A.H.*</u>

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty} = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{y = 1 \ es \ A.H.}$$

<u>*A.O.*</u>

No hay porque tiene asíntotas horizontales.

2) $f(x)=\frac{e^x}{x} \Rightarrow Dom f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

<u>*A.V.*</u>

$$\lim_{x\to 0} = \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0 \ es \ A.V.}$$

<u>*A.H.*</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-1}{xe^x} = \dfrac{-1}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=0 \ es \ A.H. \ por \ la \ izquierda}$$

<u>*A.O.*</u>

Podría tener una asíntota oblicua por la derecha pero no por la izquierda porque tiene asíntota horizontal.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \Rightarrow No \ hay \ A.O.$$

3) $f(x)=\frac{x^2}{x+1} \Rightarrow Dom f(x)=\mathbb{R}-\{-1\}$

<u>*A.V.*</u>

$$\lim_{x\to -1} = \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=-1 \ es \ A.V.}$$

<u>*A.H.*</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \infty \\ \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{No \ hay \ asíntotas \ horizontales.}$$

A.O.

Método general:

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = 1,\ n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1 \Rightarrow \boxed{y = x-1}$ *es A.O.*

Método funciones racionales:

$D(x) = d(x)\cdot C(x) + R(x) \Rightarrow x^2 = (x+1)\cdot(x-1)+1 \Rightarrow \boxed{y = x-1}$ *es A.O.*

1.5. Continuidad de una función

Definición 1.7 *Función continua*

Una función es continua en un punto x=a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Para que se cumpla tenemos que comprobar:

a) Tiene que existir $\lim_{x \to a} f(x)$ *y ser finito.*

b) Tiene que existir $f(a)$

c) Ambos números tienen que coincidir.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES:

1) Discontinuidad evitable en x=a

Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es finito pero NO es igual que $f(a)$

2) Discontinuidad inevitable de salto finito en x=a

Los límites laterales existen y son finitos pero no coinciden.

3) Discontinuidad inevitable de salto infinito en x=a

Si uno de los límites laterales, o los dos, son infinitos.

$$f(x)\begin{cases} \text{Continua} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \Rightarrow L^+ = L^- \neq f(a) \\ \text{Inevitable } L^+ \neq L^- \begin{cases} \text{Salto finito (ambos límites finitos)} \\ \text{Salto infinito (al menos uno infinito)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo 1.12 *Estudio de la continuidad de una función:*

1) $f(x) = \begin{cases} 2 & si & x < -2 \\ x^2 & si & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si & x > 1 \end{cases}$

Estudiamos el dominio en cada una de las ramas de la funcion:

$Dom(2) = \mathbb{R} \Rightarrow$ *sin problemas en* $(-\infty, -2)$
$Dom(x^2) = \mathbb{R} \Rightarrow$ *sin problemas en* $[-2, 1]$
$Dom(\frac{1}{x}) = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ *sin problemas en* $(1, \infty)$

Nos falta saber que pasa en $x = -2$ *y* $x = 1$

$\boxed{x = -2}$

$$f(-2) = 4, \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -2} f(x)$$

$f(x)$ *tiene una discontinuidad inevitable de salto finito de longitud 2 en* $x = -2$

$\boxed{x = 1}$

$$f(1) = 1, \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

$f(x)$ *es continua en* $x = 1$

$f(x)$ *es continua en* $\mathbb{R} - \{-2\}$ *donde tiene una discontinuidad inevitable de salto finito y longitud 2.*

2) $f(x) = \frac{3x}{x-1} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

$f(x)$ *tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en* $x = 1$.

3) *Calcula los valores de a y b para que f(x) sea continua en todo* $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + b & si \quad x \le 1 \\ e^{x-1} + ax & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 2 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Las tres ramas son continuas en todo $\mathbb{R}$. Nos queda por tanto estudiar que ocurre en los puntos donde la función cambia de aspecto, $x = 1$ y $x = 3$.

$\boxed{x = 1}$

$$f(1) = 1, \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} x + b = 1 + b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} e^{x-1} + ax = 1 + a \end{array}\right\}$$

Para ser continua en $x = 1$, $1 + a = 1 + b \Rightarrow a = b$

$\boxed{x = 3}$

$$f(3) = 1, \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} e^{x-1} + ax = e^2 + 3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} x^2 - 2x - 2 = 1 \end{array}\right\}$$

Para ser continua en $x = 3$, $1 = e^2 + 3a \Rightarrow a = \frac{1-e^2}{3}$

Para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ tiene que serlo tanto en $x = 1$ como en $x = 3$ y por tanto se deben dar ambas condiciones a la vez:

$$a = \frac{1-e^2}{3} = b$$

4) $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$

Esta función es un ejemplo de discontinuidad evitable y por tanto también lo es de una función que no presenta una asíntota vertical en el punto donde falla el dominio.

1.6. Derivadas y aplicaciones

1.6.1. Derivabilidad

Definición 1.8 *Se dice que f(x) es derivable en x=a si existe* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, *y si es un número finito.*

Este número es $f'(a)$, *la derivada de* f *en* a.

NOTA 1.10 *Que exista un límite implica que existan los dos límites laterales y coincidan. Esto no suele dar problemas salvo en la indeterminación* $\frac{k}{0}$ *y en mayor medida en las funciones definidas a trozos ya que al acercarnos a un punto por diferentes lados la función puede no ser la misma. Por este motivo hay que tener especial cuidado a la hora de estudiar la derivabilidad de las funciones a trozos. Así:*

$f(x)$ *es derivable en* $x = a$ *si existen y son iguales sus derivadas laterales:*

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

<u>Observación:</u>

Si $f(x)$ es derivable $\Rightarrow f(x)$ es continua
Si $f(x)$ no es continua $\Rightarrow f(x)$ no es derivable

Ejemplo 1.13 *Estudia sin son derivables las siguientes funciones y calcula su derivada si existe en* $x = 0$.

1) $f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0 \Rightarrow f(x) \ \textit{derivable y } f'(0) = 0$$

2) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

EL VALOR ABSOLUTO ES SIEMPRE UNA FUNCIÓN A TROZOS

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{0}=\frac{0}{0}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1\\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1\end{array}\right.$$

$f(x)=|x|$ *no es derivable en* $x=0$

3) $f(x)=\left\{\begin{array}{lll}3x^2 & si & x\leq 0\\ 3x & si & x>0\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=0\\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h}{h}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \textit{no derivable en } x=0$$

1.6.2. Función derivada

Definición 1.9 *La función derivada de f(x) es la función que asocia a cada valor de x del dominio de f(x) el número f'(x).*

1.6.3. Derivadas de las operaciones con funciones

NOTA 1.11 *Se utilizarán indistintamente las siguientes notaciones:*

$$D(f(x))=f'(x)$$

para representar la derivada de una función.

- $D(k)=0 \qquad \forall k\in\mathbb{R}$
- $D(f\pm g)=f'\pm g'$
- $D(k\cdot f=k\cdot f'$
- $D(f\cdot g)=f'\cdot g+f\cdot g'$
- $D\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

<u>REGLA DE LA CADENA</u>

$D(f\circ g)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

1.6.4. Tabla de derivadas

Potencial	$D(f^n) = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
Logarítmica	$D(log_a)f = \frac{f'}{f} \cdot \frac{1}{Lna}$ $D(Lnf) = \frac{f'}{f} \cdot \frac{1}{Lne} = \frac{f'}{f}$
Exponencial	$D(a^f) = a^f \cdot f' \cdot Lna$
Trigonométricas	$D(senf) = cosf \cdot f'$ $D(cosf) = -senf \cdot f'$ $D(tgf) = \frac{f'}{cos^2 f} = sec^2 f \cdot f' = (1+tg^2 f) \cdot f'$ $D(arcsenf) = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$ $D(arccosf) = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$ $D(arctgf) = \frac{f'}{1+f^2}$
Exponencial-potencial	$D(f^g) = D(e^{Lnf^g})$

Ejemplo 1.14 *Calculo de la derivada de funciones:*

1) $f(x) = 3x^2 - x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x - 1$

2) $f(x) = x^8 - 7x^3 + 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 8x^7 - 21x^2 + 2$

3) $f(x) = (x^2 - 1)senx \Rightarrow f'(x) = 2xsenx + (x^2 - 1)cosx$

4) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-4x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4x+2)-(2x-4)(x+5)}{(x^2-4x+2)^2} = \frac{-x^2-10x+22}{(x^2-4x+2)^2}$

5) $f(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{7}x^{\frac{-6}{7}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3} = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^3 - 3x^2(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x^6} = \frac{\frac{x^3}{2\sqrt{x-1}} - 3x^2\sqrt{x-1}}{x^6}$

7) $y = cos(3x^2 - \pi) \Rightarrow y' = -sen(3x^2 - \pi) \cdot 6x = -6xsen(3x^2 - \pi)$

8) $y = Ln(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow y' = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

9) $y = \frac{x-1}{x^2+4} \Rightarrow y' = \frac{1\cdot(x^2+4)-2x(x-1)}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+2x+4}{(x^2+4)^2}$

10) $y = (x^2 + 3)e^x \Rightarrow y' = 2xe^x + e^x(x^2 + 3) = e^x(x^2 + 2x + 3)$

11) $y = \frac{x^2}{senx} \Rightarrow y' = \frac{2xsenx - x^2cosx}{sen^2x}$

12) $f(x) = \frac{x+3}{x-3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-3-x-3}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$

13) $f(x) = tg(x+4) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{cos^2(x+4)}$

14) $f(x) = e^{x^4+1} \Rightarrow f'(x) = e^{x^4+1}(4x^3)$

15) $f(x) = \sqrt{x^2-4} = (x^2-4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

16) $y = e^x \cdot tgx \Rightarrow y' = e^x \cdot tgx + \frac{e^x}{cos^2x} = e^x(tgx + sec^2x)$

17) $y = \frac{senx+cosx}{x-3}$	18) $y = \sqrt[4]{Lnx}$	19) $y = x \cdot tg^3x$
20) $y = sen(x^2-1)$	21) $y = Ln(secx)$	22) $y = \frac{cotgx}{x^2}$
23) $y = arcsen(3x+1)$	24) $y = \sqrt[3]{secx}$	25) $y = (x+2)cosecx$
26) $y = Ln(tgx)$	27) $y = arccos\sqrt{x+1}$	28) $y = Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$
29) $y = Ln^3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)$	30) $y = arcsen(Lnx)$	31) $y = arctg\frac{x}{x+1}$
32) $y = senx \cdot tgx$	33) $y = e^{tg^3x}$	

1.6.5. Aplicaciones de las derivadas

Regla de L'Hopital

Para las indeterminaciones de los tipos $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ se tiene que:

$$\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 1.15 *Aplicación de la regla de L'Hopital*

- $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{sen2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{3cos3x}{2cos2x} = \frac{3}{2}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{Lnx}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{Ln(1+x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(e^x+e^{-x})}{1} = 2$

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{Lnx}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+Lnx}=$ $\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{Lnx+\frac{1}{x}(x-1)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{senx}=0^0=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} senxLnx}=e^{0\cdot\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{\frac{1}{senx}}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$ $e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{cosx}{sen^2x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{sen^2x}{xcosx}}=e^{\frac{0}{0}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2senxcosx}{cosx-xsenx}}=e^0=1$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{e^x},\ k>0$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{(e^x+x)}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Lnx}{x^k},\ k>0$

Recta tangente y normal a f(x) en x=a

Definición 1.10 *Rectas tangente y normal a una función en un punto a.*

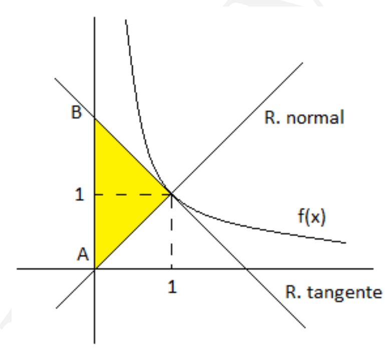
Recta tangente: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

Recta normal: $y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

Ejemplo 1.16 *Calcula el área del triángulo formado por el eje vertical y las rectas tangente y normal a la curva* $f(x)=\frac{1}{x}$ *en el punto de abcisa 1.*

$x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{1}=1$
$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(1)=-1$

R. tg: $y-1=-(x-1)\Rightarrow\boxed{y=-x+2}$ *R. norm:* $y-1=(x-1)\Rightarrow\boxed{y=x}$



La altura del triángulo pedido es 1. La base será la distancia entre los puntos A y B. El punto A será el corte de la recta normal y el eje Y. El punto B será el corte entre la recta tangente y el eje Y.

$$A \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (0,0) \qquad B \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = -x + 2 \\ x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (0,2)$$

Por lo tanto el Área pedida es $\boxed{A = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1u^2}$

Ejemplo 1.17 *La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3,0)$. Sabiendo que $f'(2) = \frac{1}{2}$, calcula $f(2)$.*

R. tangente: $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - f(2) = \frac{1}{2}(x-2)$

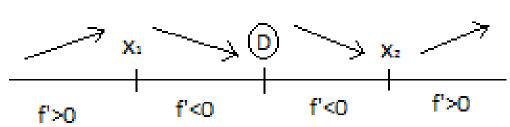
Pasa por $(-3,0) \Rightarrow 0 - f(2) = \frac{1}{2}(-3-2) \Rightarrow \boxed{f(2) = \frac{5}{2}}$

Monotonía: crecimiento y extremos relativos

1) Calculamos el dominio de $f(x)$.
2) Calculamos los puntos críticos $f'(x) = 0$. Son los posibles extremos.
3) Calculamos el dominio de $f'(x)$.

Representamos los posibles extremos en una recta y damos valores para la x en $f'(x)$ en cada uno de los intervalos en los que queda dividida la recta. Si $f' > 0$ la función crece en ese intervalo. Si $f'(x) < 0$ la función decrece en ese intervalo. Si la función pasa de subir a bajar en un punto y ese punto pertenece al dominio de la función y su derivada entonces la función presenta un máximo en ese punto. Si la función pasa de bajar a subir en un punto y ese punto pertenece al dominio de la función y su derivada entonces la función presenta un mínimo en ese punto.

Supongamos que obtenemos tres posibles extremos de los cuales el punto D no pertenece al dominio de la función.



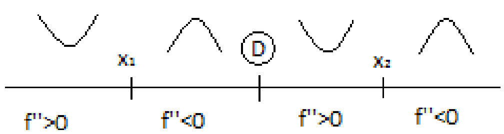
$f(x)$ crece $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
$f(x)$ decrece $(x_1, D) \cup (D, x_2)$
$f(x)$ tiene un máximo en $(x_1, f(x_1))$
$f(x)$ tiene un mínimo en $(x_2, f(x_2))$

Curvatura y puntos de inflexión

1) Calculamos el dominio de $f(x)$.
2) Calculamos los puntos críticos $f''(x) = 0$. Son los posibles P.I.

De un modo similar al que hicimos con los extremos relativos representamos los posibles P.I. en una recta y damos valores para la x en $f''(x)$ en cada uno de los intervalos en los que queda dividida la recta. Si $f'' > 0$ la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo. Si $f''(x) < 0$ la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo. Si la función cambia de curvatura y ese punto pertenece al dominio de la función entonces la función presenta un P.I. en ese punto.

Supongamos que obtenemos tres posibles P.I. de los cuales el punto D no pertenece al dominio de la función.



$f(x)$ es cóncava hacia arriba $(-\infty, x_1) \cup (D, x_2)$
$f(x)$ es cóncava hacia abajo $(x_1, D) \cup (x_2, \infty)$
$f(x)$ tiene un P.I. en $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$

NOTA 1.12 *Es importante tener en cuenta que un extremo no es el punto donde la derivada de una función es cero. Hay extremos relativos en puntos donde una función no es derivable (esto pasa con el valor absoluto). La forma intuitiva de nombrarlos es decir que son aquellos puntos donde la función existe y pasa de subir a bajar o viceversa.*

NOTA 1.13 *Hay otro método para calcular extremos relativos y puntos de inflexión que se usa mucho sobre todo en los problemas de optimización. Si la función es fácilmente derivable sucesivas veces es recomendable.*

Si a es un punto que anula la primera derivada de una función ($f'(a) = 0$) tenemos que:

- *Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ La función tiene un mínimo en $x = a$*
- *Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ La función tiene un máximo en $x = a$*

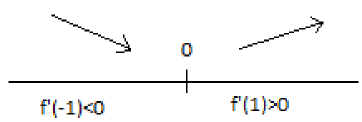
- *Si $f''(a) = 0 \Rightarrow$ Tenemos que seguir derivando hasta que alguna de las sucesivas derivadas sea distinta de 0. Si deja de ser 0 en una derivada de orden par (la segunda, la cuarta, etc.) será o un máximo o un mínimo. Si deja de ser 0 en una derivada de orden impar se trata de un punto de inflexión.*

Ejemplo 1.18 *Calcula los extremos, el crecimiento, la curvatura y los P.I. de:* $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$

$Dom f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2+3)-2x(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$

Buscamos los puntos críticos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$



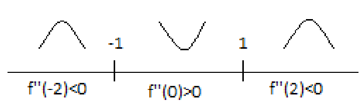
$f(x)$ decreciente en $(-\infty, 0)$
$f(x)$ es creciente en $(0, \infty)$
$f(x)$ tiene un mín. en $(0, -1)$

Buscamos los posibles puntos de inflexión:

$f''(x) = \frac{12(x^2+3)^2-2(x^2+3)2x\cdot 12x}{(x^2+3)^4} = \frac{-36x^4-72x^2+108}{(x^2+3)^4} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow$

$-36x^4 - 72x^2 + 108 = 0 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{c.v. \quad x^2 = t} \Rightarrow$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R} \\ t = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$



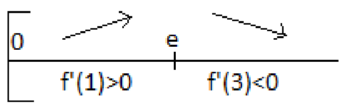
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, 1)$
$f(x)$ tiene P.I. $(-1, \frac{-1}{2})$ y $(1, \frac{-1}{2})$

Ejemplo 1.19 *Calcula los extremos, el crecimiento, la curvatura y los P.I. de:* $f(x) = \frac{Lnx}{x}$

$Dom f(x) = (0, \infty)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - Lnx}{x^2} = \frac{1-Lnx}{x^2}$

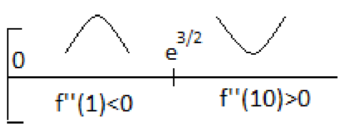
Buscamos los puntos críticos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - Lnx = 0 \Rightarrow Lnx = 1 \Rightarrow x = e$



$f(x)$ es creciente en $(0, e)$
$f(x)$ decreciente en (e, ∞)
$f(x)$ tiene máx. en $(e, \frac{1}{e})$

Buscamos los posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x} \cdot x^2 - 2x + 2xLnx}{x^2} = \frac{-3x + 2xLnx}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 0$$
$$\Rightarrow -3x + 2xLnx = 0 \Rightarrow x(-3 + 2Lnx) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin Dom f(x) \\ 2Lnx = 3 \Rightarrow Lnx = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$



$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(0, e^{\frac{3}{2}})$
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$
$f(x)$ tiene P.I. $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}})$

NOTA 1.14 *En el último ejemplo cabe la tentación de simplificar la segunda derivada antes de igualarla a 0, pero esto no se puede hacer ya que se pierden soluciones. En este ejemplo no afecta porque la solución que se pierde es la de $x = 0$ que no pertenece al dominio, pero en otras ocasiones puede ocasionar problemas.*

NOTA 1.15 *Con estas dos últimas aplicaciones de las derivadas podemos realizar la representación gráfica de funciones. Para representarlas sin duda necesitamos:*

1 *Dominio*

2 *Puntos de corte con los ejes*

3 *Asíntotas*

4 *Extremos*

Se pueden estudiar más cosas como la simetría o la periodicidad y hacerlo nos facilitará la tarea pero no es estrictamente necesario.

En el caso de que tengamos que representar una función a trozos nos aseguraremos también de dar valores a la función en los puntos donde cambie de rama.

Ejemplo 1.20 *Representación gráfica de funciones:*

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

• *Corte EJE X* ($y = 0$)$\Rightarrow 0 = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

• *Corte EJE Y* ($x = 0$)$\Rightarrow y = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow (0,0)$ *Cosa que ya sabíamos porque una función solo puede cortar al eje Y una vez.*

• *ASÍNTOTAS:*

$$a)\ A.V. \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = \infty \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x=2} \text{ es } A.V.$$

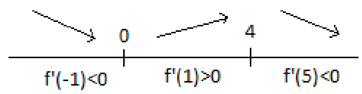
$$b)\ A.H. \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty \\ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

$c)$ $A.O. \Rightarrow y = mx + n$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{2x - x^2} = -1 \\ \\ n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{y = -x-2}$$

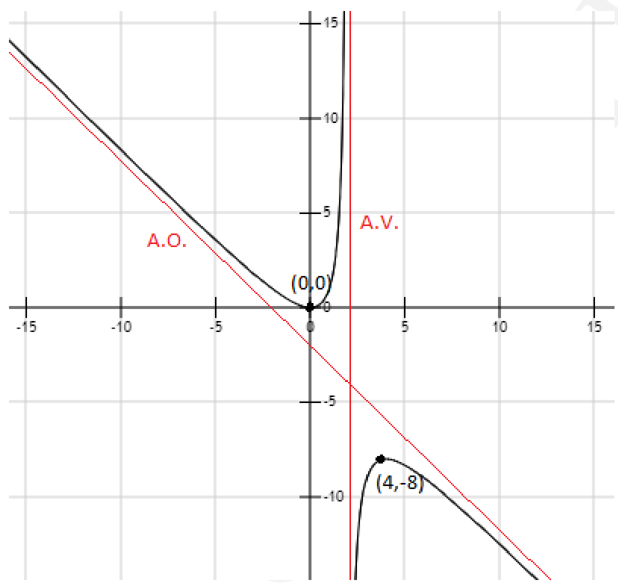
• *EXTREMOS*

$f'(x) = \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{2-x)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$
$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x+4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$



$f(x)$ tiene un máx. en $(0,0)$
$f(x)$ tiene un mín. en $(4,-8)$

$f''(x) = \frac{(-2x+4)(2-x)^2+2(2-x)(-x^2+4x)}{(2-x)^4} = \frac{-8x+16}{(2-x)^4} \Rightarrow f''(x) = 0$
$f''(x) = 0 \Rightarrow -8x+16 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin Dom f(x)$



Ejemplo 1.21 *Representación gráfica de funciones:*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R}$$

- *Corte EJE X ($y=0$)*$\Rightarrow 0 = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$
- *Corte EJE Y ($x=0$)*$\Rightarrow y = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0,0)$
- *ASÍNTOTAS:*

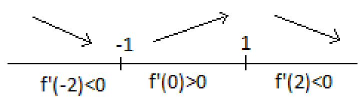
  a) A.V. $\nexists$ *Porque el dominio es todo* $\mathbb{R}$

  b) A.H. $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{y=0}$ *es A.H.*

c) A.O. $\Rightarrow \nexists$ *Porque tiene A.H. por ambos lados.*

- *EXTREMOS*

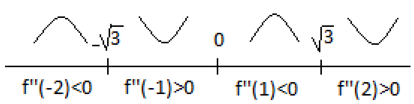
$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



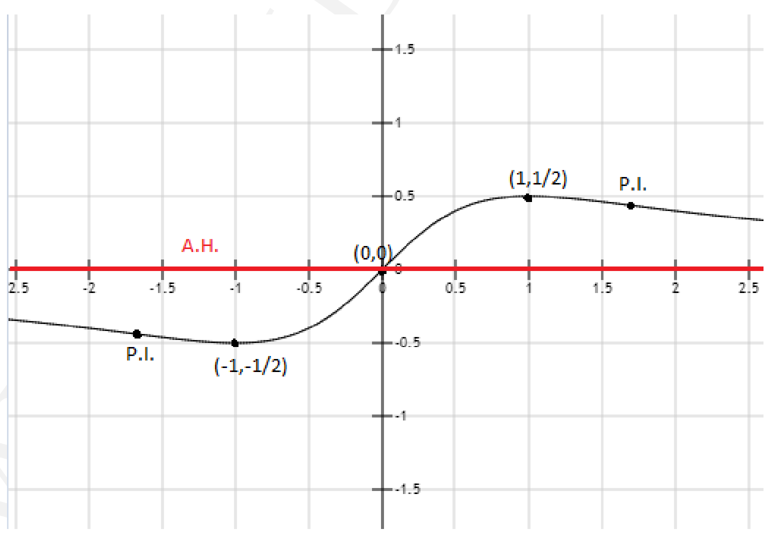
$f(x)$ tiene un máx. en $(1, \frac{1}{2})$
$f(x)$ tiene un mín. en $(-1, -\frac{1}{2})$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f''(x) = 0$$

$$2x^5 - 4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x^4 - 2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$



$f(x)$ tiene un P.I. en $(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$
$f(x)$ tiene un P.I. en $(0, 0)$
$f(x)$ tiene un P.I. en $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$



Problemas de optimización

En los problemas de optimización se nos pide siempre que maximicemos o minimicemos alguna magnitud (volumen, área, etc.).

En la mayoría de los casos tendremos una función a maximizar en dos variables, pero en este curso solo trabajamos funciones de una sola variable.

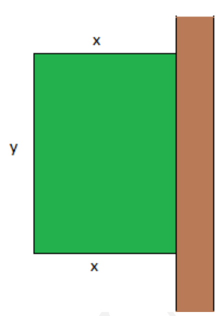
En la primera parte del ejercicio buscaremos alguna relación entre esas dos variables (denominada pedantemente "condición de ligadura"). Una vez conseguido esto sustituiremos esa relación en la función a maximizar o minimizar.

Para maximizar o minimizar la función buscaremos sus extremos como hemos hecho a lo largo de la sección.

NOTA 1.16 *En estos ejercicios es obligatorio comprobar al final del mismo que el valor que hemos obtenido para nuestra variable es un máximo (si nos pidieron maximizar) o mínimo (si nos pidieron minimizar).*

Este comentario puede parecer obvio, pero a la hora de practicar nos daremos cuenta de que en el 99,99 % de los problemas que hagamos nos saldrá un único candidato y resultará ser lo que se nos pedía, por lo que es bastante frecuente olvidarse de este último paso.

Ejemplo 1.22 *Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros por metro y la de los otros lados 10 euros por metro, halla el área del mayor campo que se puede cercar con 28800 euros.*



La función que nos piden maximizar es una función en dos variables: $S(x,y) = x \cdot y$. Tenemos que encontrar una relación entre las variables. Para ello utilizaremos el dinero del que disponemos.

$$28800 = 10x + 10x + 10y + 80y \Rightarrow 28800 = 20x + 90y$$

$$\Rightarrow x = \frac{2880 - 9y}{2}$$

$S(x,y) = x \cdot y \Rightarrow S(y) = \frac{2880-9y}{2} \cdot y \Rightarrow S(y) = 1440y - \frac{9}{2}y^2$

Buscamos ahora los extremos de la función obtenida:

$S'(y) = 1440 - 9y \Rightarrow S'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{1440}{9} = 160$ *(metros).*

Como la función es muy fácil de derivar vamos a utilizar el segundo método que vimos para saber si lo que hemos encontrado es un máximo o un mínimo de la función.

$S''(y) = -9 \Rightarrow S''(160) = -9 < 0 \Rightarrow$ *el punto obtenido es un máximo de la función y por lo tanto maximiza el área.*

Solo nos falta obtener el área pedida:

$A_{max} = x \cdot y = \frac{2880-9\cdot 160}{2} \cdot 160 = \boxed{115200\ m^2}$

1.7. Integrales

Definición 1.11 *Primitiva*

$F(x)$ es primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$

Definición 1.12 *Integral indefinida*

Es el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Se lee "integral de $f(x)$ diferencial de x"

PROPIEDADES:

a) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

b) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

1.7.1. Integrales inmediatas

1) Potencial: $\displaystyle\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

Ejemplo 1.23 *Integrales inmediatas potenciales.*

- $\int 1\,dx = x + C$
- $\int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4} + C$
- $\int 3 \cdot (3x+2)^5\,dx = \dfrac{(3x+2)^6}{6} + C$
- $\int \dfrac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = \dfrac{-1}{x^2} + C$

- $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

2) Exponencial: $\displaystyle\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{Lna} + C$

Ejemplo 1.24 *Integrales inmediatas exponenciales.*

- $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{Ln2} + C$
- $\displaystyle\int 2x \cdot 3^{x^2}\,dx = \frac{3^{x^2}}{Ln3} + C$
- $\displaystyle\int 5 \cdot e^{5x}\,dx = \frac{e^{5x}}{Lne} + C = e^{5x} + C$

3) Logarítmica: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = Ln|f(x)| + C$

Ejemplo 1.25 *Integrales inmediatas logarítmicas.*

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = Ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = Ln|x^2-1| + C$
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = Ln|1+e^x| + C$

4) Trigonométricas: Incluimos tanto las integrales de funciones trigonométricas como aquellas integrales importantes que dan como resultado funciones trigonométricas.

4.1) Seno: $\displaystyle\int f'(x) \cdot senf(x)\,dx = -cosf(x) + C$

4.2) Coseno: $\displaystyle\int f'(x) \cdot cosf(x)\,dx = senf(x) + C$

4.3) Tangente: $\displaystyle\int f'(x) \cdot tgf(x)\,dx = -Ln|cosf(x)| + C$

4.4) De resultado tangente: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}\,dx = tgf(x) + C$

4.5) De resultado arcoseno: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = arcsen\frac{f(x)}{a} + C$

4.6) De resultado arcotg.: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}arctg\frac{f(x)}{a} + C$

Ejemplo 1.26 *Integrales inmediatas trigonométricas.*

- $\displaystyle\int 2sen2x\,dx = -cos2x + C$
- $\displaystyle\int 3x^2cosx^3\,dx = senx^3 + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \frac{1}{5}arcsen\frac{x}{5} + C$
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = arctge^{2x} + C$

NOTA 1.17 *Para las integrales trigonométricas es útil recordar determinadas relaciones. Las siguientes aparecen con frecuencia:*

$$\left.\begin{array}{l} cos^2x + sen^2x = 1 \\ cos2x = cos^2x - sen^2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} cos^2x = \frac{1+cos2x}{2} \\ sen^2x = \frac{1-sen2x}{2} \end{array}$$

1.7.2. Ajustes en las integrales

Muchas veces la integral que queremos calcular no es, "exactamente", inmediata. Para que lo sean podemos emplear la segunda propiedad que vimos al comienzo de la sección y multiplicar o dividir por un número (NUNCA POR UNA VARIABLE).

La estrategia consiste en multiplicar dentro de la integral por el número que necesitemos y al mismo tiempo dividir fuera de la misma por ese mismo número para que no alteremos el resultado.

Ejemplo 1.27 *Cálculo de integrales mediante pequeños "ajustes".*

- $\displaystyle\int x\cdot(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{8} + C$
- $\displaystyle\int tg2x\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2sen2x}{cos2x}\,dx = -\frac{1}{2}Ln|cos2x| + C$

1.7.3. Integrales de funciones racionales

Estas integrales son del tipo $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Hay diferentes estrategias dependiendo de los grados del numerador y denominador así como de las raíces del denominador. Las vemos con detalle.

El grado del numerador es mayor o igual que el del denominador

Hacemos la división entre los polinomios y expresamos la integral mediante el uso de la prueba de la división y aplicando la primera propiedad que vimos al principio de la sección:

$$D = d \cdot C + R \Rightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow \tfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \tfrac{R(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo 1.28 *Integral de funciones racionales.*

$\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx \Rightarrow$ *dividimos los polinomios* $\Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow$
$\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

$$\boxed{x + \frac{1}{2} \cdot Ln|1+x^2| + C}$$

El grado del numerador es menor que el del denominador

Dependiendo de las raíces del denominador tenemos diferentes opciones. Vemos las que involucran únicamente raíces reales.

a) Raíces reales simples:

Descomponemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + ... + \frac{N}{x-n}$, donde $a, b, ..., n$ son las raíces.

Ejemplo 1.29 $\displaystyle\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,dx$

Buscamos las raíces de $x^2 - x - 8 \Rightarrow x^2 - x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-4B}{(x-4)(x+2)} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} A+B=5 \\ 2A-4B=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A=4,\ B=1$

$$\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,dx = \int \left(\frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2}\right)dx = \int \frac{4}{x-4}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$\boxed{4Ln|x-4| + Ln|x+2| + C}$$

b) Raíz real múltiple:

Descomponemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \ldots\ldots + \frac{N}{(x-a)^n}$,

donde n es el grado de multiplicidad de la raíz.

Ejemplo 1.30 $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+7}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$

$x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow x^3-3x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=1,$ *triple*

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{2x^2-5x+7}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C}{(x-1)^3} \Rightarrow$

$A=2,\ B=-1,\ C=4$

$$\int \frac{2x^2-5x+7}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx == \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{4}{(x-1)^3}\,dx =$$

$$\boxed{2Ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + C}$$

c) Raíces reales simples y múltiples:

Descomponemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples tratando a las raíces simples como se vio en el primer apartado y a las múltiples como se hizo en el segundo:

Ejemplo 1.31 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

Buscamos raíces:$\Rightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Rightarrow x=-1,\ x=1$ *doble*

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} \Rightarrow$

Vamos a ver un método diferente para calcular A,B y C.

Igualamos los numeradores y le damos valores a la x:

$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1)$

Si $x=1 \Rightarrow 8=2C \Rightarrow C=4$
Si $x=-1 \Rightarrow 2=4A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$
Si $x=0 \Rightarrow 5=A-B+C \Rightarrow 5=\frac{1}{2}-B+4 \Rightarrow B=\frac{-1}{2}$

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}\,dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}Ln|x+1| - \tfrac{1}{2}Ln|x-1| - \tfrac{4}{x-1} + C}$$

1.7.4. Integrales por partes

Definición 1.13 *Integración por partes:*

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du} \qquad \begin{cases} u \longrightarrow du \text{ (parte de la función que derivamos)} \\ dv \longrightarrow v \text{ (parte de la función que integramos)} \end{cases}$$

NOTA 1.18 *Para elegir dentro de una integral de este tipo qué función derivamos y qué función integramos se utiliza la siguiente regla nemotécnica que indica en qué orden se derivan las funciones:*

A $\longrightarrow$	arcoseno, arcocoseno
L $\longrightarrow$	logaritmos
P $\longrightarrow$	polinomios
E $\longrightarrow$	exponenciales
S $\longrightarrow$	sen/cos/tg

Ejemplo 1.32 *Cálculo de integrales por partes.*

1) $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

$u = x \longrightarrow du = 1dx$
$dv = e^x dx \longrightarrow v = e^x$

2) $\displaystyle\int x^2 Lnx\,dx = \frac{x^3 Lnx}{3} - \frac{1}{3}\int x^2, dx = \frac{x^3 Lnx}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

$u = Lnx \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx$
$dv = x^2 dx \longrightarrow v = \frac{x^3}{3}$

3) $\displaystyle\int x^2 cos^2 x\,dx = -x^2 senx + 2\int xsenx\,dx = -x^2 senx + 2\left(xcosx - \int cosx\,dx\right) =$
$-x^2 senx + 2xcosx - 2senx + C$

$u = x^2 \longrightarrow du = 2xdx$
$dv = cosxdx \longrightarrow v = -senx$

$u = x \longrightarrow du = 1dx$
$dv = senxdx \longrightarrow v = cosx$

4) $\displaystyle\int e^x senx\,dx = -e^x cosx + \int cosxe^x\,dx = -e^x cosx + e^x senx - \int e^x senx\,dx =$
$-x^2 senx + 2xcosx - 2senx + C$

$u = e^x \longrightarrow du = e^x dx$
$dv = senxdx \longrightarrow v = -cosx$

$u = e^x \longrightarrow du = e^x dx$
$dv = cosxdx \longrightarrow v = senx$

$I = -e^x cosx + e^x senx - I \Rightarrow 2I = e^x(senx - cosx) \Rightarrow$

$$I = \frac{e^x(senx - cosx)}{2}$$

1.7.5. Integrales por cambio de variable

Se utiliza este método para simplificar el cálculo de determinadas integrales. Es importante acordarse de que además de cambiar la variable hay que hacer lo mismo con el diferencial de la variable.

Ejemplo 1.33 *Cálculo de integrales por cambio de variable.*

- $$\int \frac{Ln(x+2)}{x+2}\,dx = \boxed{c.v.} = \int \frac{Lnt}{t}\,dt = \frac{Ln^2 t}{2} + C = \frac{Ln^2(x+2)}{2} + C$$

  $\boxed{c.v.}$ $\quad x+2 = t \Rightarrow 1dx = 1dt$

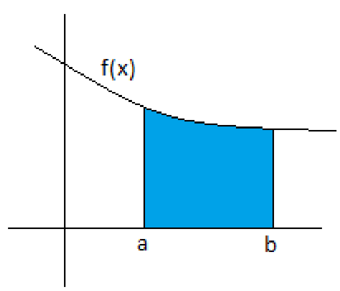
- $$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx = \boxed{c.v.} = \int \frac{1}{t^3(1+t)} \cdot 3t^2\,dt = 3\int \frac{1}{t(1+t)}\,dt =$$

  Integral racional

  $\boxed{c.v.}$ $\quad x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$

1.7.6. Integral definida

Definición 1.14 *Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a,b]$, la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abcisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.*



La integral definida se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$, donde a y b se denominan límites de integración.

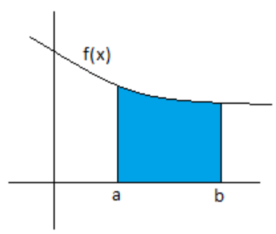
Las mismas propiedades de las integrales indefinidas son aplicables a estas y añadimos dos más que necesitaremos (en especial la segunda):

a) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

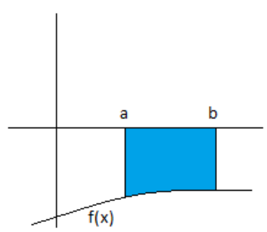
b) Si c es un punto interior del intervalo $[a, b]$, la integral definida se descompone como una suma de dos integrales en los intervalos $[a, c]$ y $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

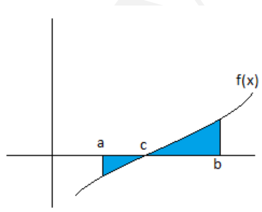
NOTA 1.19 *Si la curva (función) está bajo el eje OX el resultado de la integral será negativo, cosa que, hablando de áreas, no tiene sentido. Habrá, por tanto, que cambiarle el signo a la integral.*
Una vez dicho esto solo hay que prestar atención a las diferentes opciones que se pueden dar.



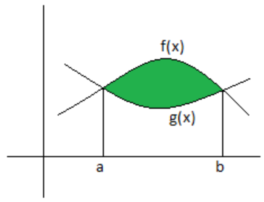
Área$= \int_a^b f(x)\,dx$

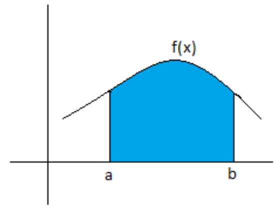


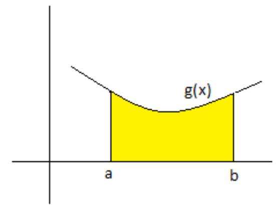
Área$= -\int_a^b f(x)\,dx$



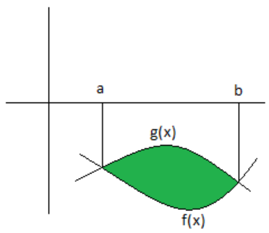
Área$= -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

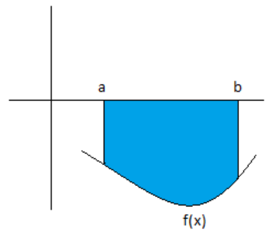


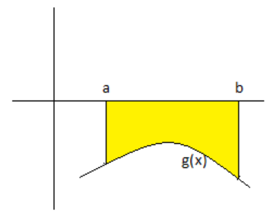




Àrea= $\int_a^b f(x)\,dx$ $-\int_a^b g(x)\,dx$







Àrea= $-\int_a^b f(x)\,dx$ $-\left(-\int_a^b g(x)\,dx\right)$

NOTA 1.20 *Una vez visto todo esto nos falta la herramienta que nos permitirá calcular estas integrales definidas y que es la que viene a continuación.*

Definición 1.15 *Regla de Barrow:*

La integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$ en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por lo tanto, primero integramos como ya sabemos hacer y luego sustituimos los límites de integración en la primitiva obtenida como indica la regla de Barrow.

Ejemplo 1.34 *Cálculo de la integral definida. Regla de Barrow.*

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right] = \frac{-5}{72}$$

NOTA 1.21 *A la hora de resolver problemas de cálculo de áreas es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:*

a) Los límites de integración nos los pueden dar como ecuaciones de rectas verticales ($x = a$) o como puntos en el eje de abcisas.

b) En el caso de áreas entre dos funciones puede que no nos den esos límites de integración y en ese caso los calcularemos viendo donde se cortan las funciones.

c) Hay que saber si las funciones cortan al eje X (cosa que sabemos hacer sin problema). Esto nos indicará cuando están por encima o por debajo de dicho eje. Esto es de vital importancia para conocer el signo que tendremos que poner a la integral.

d) Cuando hay dos funciones, para saber cuál está por encima y cuál por debajo en un intervalo dado, basta con dar un valor a la función en dicho intervalo.

e) El dibujo de las funciones no es estrictamente necesario si conocemos todo lo anterior, pero siempre será de ayuda aunque se trate únicamente de un boceto.

f) En ejercicios más complicados basta con hacerse bien el dibujo y aplicar el sentido común.

Ejemplo 1.35 *Hallar el área limitada por la recta $y = \dfrac{3x-6}{2}$, el eje de abcisas y las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 4$.*

Comprobamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{3x-6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{3x-6}{2} \Rightarrow x = 2$$

OJO, la función corta al eje X en el intervalo $[0,4]$. Tenemos por tanto que comprobar cuando está por encima y cuando por debajo. $f(1) = \frac{-3}{2}$, $f(3) = \frac{3}{2}$.

Usando la segunda propiedad de las integrales definidas tenemos que separar la integral en dos:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

Como la primera parte de la función está debajo del eje X, al calcular el área tendremos que cambiar el signo de esa integral:

$$\text{Área} = -\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

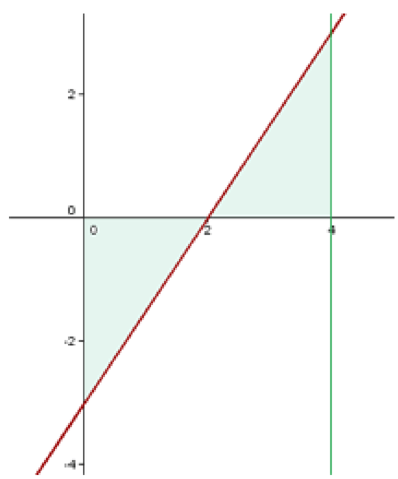
Por último utilizaremos las propiedades de las integrales vistas al comienzo de la sección, resolveremos y utilizaremos la regla de Barrow:

$$-\int_0^2 \frac{3x-6}{2}\,dx + \int_2^4 \frac{3x-6}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 3x-6\,dx + \frac{1}{2}\int_2^4 3x-6\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_2^4 = -\frac{1}{2}(6-12) + \frac{1}{2}[(24-24)-(6-12)] =$$

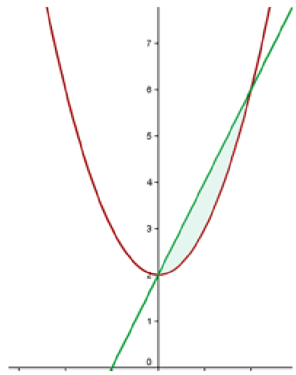
$$= 3 + 3 = \boxed{6u^2}$$

Todo lo explicado anteriormente se ve claramente si dibujamos la función:



Ejemplo 1.36 *Calcular el área del recinto limitado por la parábola* $y = x^2 + 2$ *y la recta que pasa por los puntos* $(-1, 0)$ *y* $(1, 4)$.

Lo primero es escribir la ecuación de dicha recta: $y = 2x + 2$. *Dibujamos esta vez antes de empezar a calcular nada:*



Calculamos los puntos de corte entre las funciones, que serán posteriormente los límites de integración.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Como la recta queda por encima de la parábola en el intervalo $[0, 2]$ *el área pedida será:*

$$\int_0^2 2x+2\,dx - \int_0^2 x^2+2\,dx = \left[x^2 + 2x\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = 8 - \left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{4}{3}u^2$$

NOTA 1.22 *Como la suma de integrales es igual a la integral de la suma (lo mismo con la resta), se pueden juntar las integrales antes de resolverlas lo que puede facilitar los cálculos:*

$$\int_0^2 2x + 2\,dx - \int_0^2 x^2 + 2\,dx = \int_0^2 2x + 2 - x^2 - 2\,dx = \int_0^2 2x - x^2\,dx =$$
$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$$

Ejemplo 1.37 *Hallar el área de la figura limitada por $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 2$.*

En este caso me están dando los límites de integración en el enunciado. Vamos por tanto a ver los puntos de corte entre las funciones que nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$$

En el intervalo $[0,1]$, la parábola ($f(0{,}5) = 0{,}25$), está por debajo de la recta ($f(0{,}5) = 0{,}5$). Sin embargo en el intervalo $[1,2]$ la parábola ($f(1{,}5) = 2{,}25$) queda por encima de la recta ($f(1{,}5) = 1{,}5$).

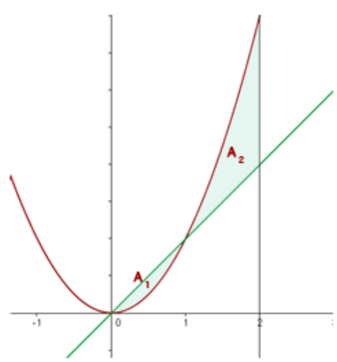
En el intervalo $[0,2]$ ambas funciones quedan por encima del eje X. Por lo tanto el área pedida será:

$$\text{Área}= \left(\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx\right) + \left(\int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx\right)$$

Utilizando la propiedad de las integrales de la nota anterior podemos simplificar esta expresión:

$$\text{Área}= \int_0^1 x - x^2\,dx + \int_1^2 x^2 - x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{6}{3} - 1 = 1u^2$$

Como siempre, todo queda más claro si previamente dibujamos lo que nos piden:



1.8. Problemas PAU

Problema 1.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$*, se pide:*

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ *en* $x = 2$.

b) (0,75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ *y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$

c) Calcular $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx$

Problema 1.2 *Dada la función* $f(x) = e^{3x-2}$*, se pide:*

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ *tiene pendiente igual a* $\frac{3}{e}$ *y escribir la ecuación de esta recta tangente.*

b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ *y las rectas* $x = 0$, $y = 1$

Problema 1.3 *(2,5 puntos) Un brote de enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función* $F(t)$ *tal que* $F'(t) = t^2(10 - t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuantos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0,5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuantos días dura el brote.

Problema 1.4 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $g(1) = 3$, $g'(1) = 4$.

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$*, use la regla de la cadena para calcular* $h'(0)$.
Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, calcule* $k'(1)$.

b) *(1,25 puntos) Calcule la integral* $\int (senx)^4 (cosx)^3 \, dx$. *Se puede usar el cambio de variable* $t = senx$.

Problema 1.5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)}$, *se pide:*

a) *(1,25 puntos) Determinar las asíntotas de la curva* $y = f(x)$ *y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

b) *(1,25 puntos) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva* $y = f(x)$ *y la recta* $2x + 4y = 7$

Problema 1.6 *Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} 2sen\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$, *se pide*

a) *(0,75 puntos) Estudiar la continuidad de* $f(x)$ *en* $x = 1$

b) *(0,75 puntos) Determinar si existe,* $f'(1)$

c) *(1 punto) Calcular el valor de* $\int_0^1 x f(x) \, dx$

Problema 1.7 *Dada la función* $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, *se pide:*

a) *(0,5 puntos) Determinar su dominio.*

b) *(1,5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

c) *(0,5 puntos) Calcular sus límites laterales,* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ *y* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

Problema 1.8 *Dada* $f(x) = \dfrac{Lnx}{x}$, *definida para* $x > 0$, *se pide:*

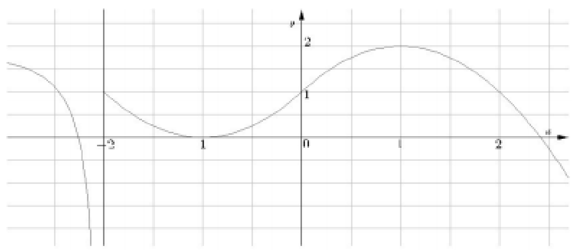
a) *(0,5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva* $y = f(x)$.

b) *(1 punto) Encontrar un punto de la curva* $y = f(x)$ *en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.*

c) *(1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.*

Problema 1.9 *(2,5 puntos)*

a) *(1 punto) A partir de la siguiente gráfica de la función f, determine los valores de: $f'(-1)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$*



b) *(1,5 puntos) Calcule $\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx$, donde $g(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & si \quad -3 \le x \le 0 \\ 1+senx & si \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$*

Problema 1.10 *La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \dfrac{23t^2}{20} - \dfrac{t^3}{30}$ mg/m^3 donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.*

a) *(0,5 puntos) ¿Qué nivel de NO_2 había a las 12 horas del día 10 de abril?*

b) *(1,25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?¿cuál fue ese nivel máximo?*

c) *(0,75 puntos) Calcule, mediante $\dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)\,dt$, el nivel promedio del mes.*

Problema 1.11 *(2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 2cosx + |x-1|$, se pide:*

a) *(0,5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.*

b) *(1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abcisa $x = \pi$.*

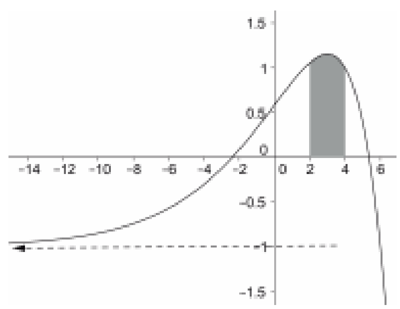
c) *(1 punto) Hallar el área del recinto del plano limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.*

Problema 1.12 *(2,5 puntos) El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función $f(x) = (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$, se pide:*

a) *(1 punto) Calcular el área de la región sombreada.*

b) *(1 punto) Determinar la abcisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.*

c) *(0,5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo.*



Problema 1.13 *(2,5 puntos) Haz lo que se indique en cada apartado:*

a) *(1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0{,}92$; $m_2 = 0{,}94$; $m_3 = 0{,}89$; $m_4 = 0{,}90$; $m_5 = 0{,}91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \dots\dots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicno valor de x.*

b) *(1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.*

Problema 1.14 *(2,5 puntos) Dada la función: $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2 + 9}}$, se pide:*

a) *(0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.*

b) *(0,75 puntos) Calcular* $f'(4)$.

c) *(1,25 puntos) Hallar el área del recinto del plano limitado por la curva* $y = f(x)$, *el eje* OX *y las rectas* $x = -1$ *y* $x = 1$.

Problema 1.15 *(2,5 puntos)Dada la función* $f(x) = 3x^2e^{-x}$, *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar los extrmos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

b) *(0,75 puntos) Calcular* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) *(0,75 puntos) Calcular los límites* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *y* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Problema 1.16 *(2,5 puntos) Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable,* x, *de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:*

a) *(0.25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso* $x = 0$ *(el frasco solo contiene los 12 ml de esencia).*

b) *(0,5 puntos) Expresar en función de* x *el precio del frasco que contiene* $(12 + x)$ *ml de mezcla.*

c) *(0,5 puntos) Deducir con qué valor de* x *el precio de la mezcla se hace cero.*

d) *(1,25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de* x *para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y precio resultante.*

Problema 1.17 *(2,5 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & si \quad x \le 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$, *se pide:*

a) *(0.75 puntos) Estudiar la continuidad de* f *en* $x = 2$.

b) *(1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de* $f(x)$. *¿Hay alguna asíntota vertical?*

c) *(0,75 puntos) Calcular* $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

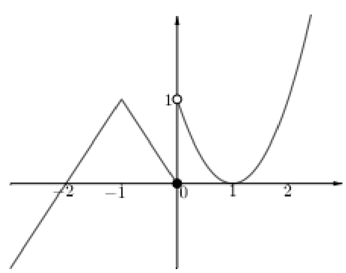
Problema 1.18 *(2,5 puntos) El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura se pide:*

a) *(0.5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.*

b) *(1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.*

c) *(0,5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.*

d) *(0,5 puntos) Determinar el valor de* $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$.



Problema 1.19 *(2 puntos) Se considera la función:* $f(x)\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$ *se pide:*

a) *(0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas verticales de f.*

b) *(0,5 puntos) Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) *(1 punto) Calcular* $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$

Problema 1.20 *(3 puntos) Dadas las funciones* $f(x) = \dfrac{2}{x}$ *y* $g(x) = senx$ *se pide:*

a) *(1 punto) Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x)}\right)$

b) *(0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$*

c) *(1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$*

Problema 1.21 *(3 puntos) Se considera la función: $f(x) = xe^{-x}$ se pide:*

a) *(0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de f.*

b) *(1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.*

c) *(1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.*

Problema 1.22 *(2 puntos) Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{\frac{-t}{2}}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.*

Problema 1.23 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

se pide:

a) *(1 punto) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.*

c) *(1 punto) Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Problema 1.24 *(2 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.*

Problema 1.25 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x-4} + 2x - 1 & si \quad x \ne 2 \\ 0 & si \quad x = 2 \end{cases}$

se pide:

a) *(1 punto) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.*

b) *(1 punto) Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.*

c) *(1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$*

Problema 1.26 *(3 puntos) Dada la función: $f(x) = (6 - x)e^{\frac{x}{3}}$ se pide:*

a) *(1 punto) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.*

b) *(1 punto) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.*

c) *(1 punto) Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.*

Problema 1.27 *(2 puntos) Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máximo. Saben que si el precio de cada una es de 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?.*
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?.

Problema 1.28 *(2 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:*

a) *(1,5 puntos) Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.*

b) *(1 punto) Calcular $\lim_{x\to -1} f(x)g(x)$*

Problema 1.29 *(2 puntos)*

a) *(1 punto) Determine el polinomio $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 12$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 4$.*

b) (1 punto) Determine el polinomio $g(x)$ sabiendo que $g''(x) = 6$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x) = 5 \ y \int_0^2 g(x) = 14$$

Problema 1.30 *(2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ |xLnx| & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Problema 1.31 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x < 1 \\ xe^{1-x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *se pide:*

a) (1,5 puntos) Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$

Problema 1.32 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x < 1 \\ xe^{1-x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *se pide:*

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y calcular $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$

b) (0,5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.

c) (1,5 puntos) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Problema 1.33 *(2 puntos) Dada la función:* $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ *se pide:*

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ *y* $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

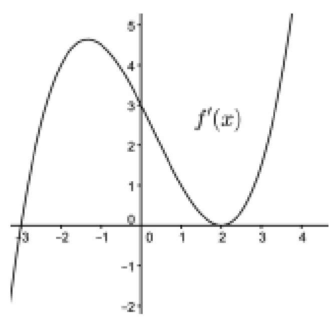
b) (1 punto) Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0, 1]$ y calcular $\displaystyle\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$

Problema 1.34 *(3 puntos) Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen. La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide.*

a) *(1 punto) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 0$.*

b) *(1 punto) Determinar las abcisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.*

c) *(1 punto) Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.*



Problema 1.35 *(3 puntos) Dada la función: $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, se pide:*

a) *(0,75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

b) *(0,5 puntos) Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.*

c) *(0,75 puntos) Calcular el valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.*

d) *(1 punto) El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.*

Problema 1.36 *(2 puntos)*

a) *(1 punto) Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx$*

b) *(1 punto) Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)e^{-x}$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$

Problema 1.37 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x)=\begin{cases} a+xLnx & si \quad x>0\\ x^2e^x & si \quad x\le 0\end{cases}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Calcular el valor de* a *para que* $f(x)$ *sea continua en todo* $\mathbb{R}$.

b) *(1 punto) Calcular* $f'(x)$ *donde sea posible.*

c) *(1 punto) Calcular:* $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Problema 1.38 *(2 puntos) Dada* $f(x)$*, función derivable, con derivada continua, tal que* $f(0)=0$ *y* $f'(0)=1$ *se define la función* $g(x)=(f(x))^2-e^{f(x)}$ *y se pide:*

a) *(1 punto) Hallar* $g(0)$, $g'(0)$ *y* $(fg)'(0)$.

b) *(0,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y=f(x)$ *en* $x=0$

c) *(0,5 puntos) Obtener el valor del* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

Problema 1.39 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{senx}{x} & si \quad x<0\\ xe^x+1 & si \quad x=0\end{cases}$ *se pide:*

a) *(2 puntos) Determinar los valores* a, b, c *para que la función:*

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x=0\\ ax-b & si \quad 0<x\le 1\\ x^2+bx+c & si \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

Sea continua en el intervalo $[0,2]$ *y derivable en* $(0,2)$.

b) *(1 punto) Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función* $g(x)=x^2+x$ *en el intervalo* $[1,2]$ *y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que* $g'(x)$ *tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.*

Problema 1.40 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = x^2e^{-x}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.*

b) *(1 punto) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.*

c) *(1 punto) Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva* $y = f(x)$.

Problema 1.41 *(2 puntos)*

a) *(0,5 puntos) Estudiar el crecimiento de la función* $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) *(1,5 puntos) Demostrar que la ecuación* $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ *tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.*

Problema 1.42 *(3 puntos) Hallar:*

a) *(1 punto)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + senx} - \sqrt{1 - senx}}{x}$

b) *(1 punto)* $\displaystyle\int (3x + 5)cosx\, dx$

c) *(1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función:* $f(x) = \dfrac{ex - e^x}{x}$

Problema 1.43 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{Ln(x + 1)}{x + 1}$ *se pide:*

a) *(1,5 puntos) Determinar el dominio de* f *y sus asíntotas.*

b) *(0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en* $x = 0$.

c) *(0,75 puntos) Calcular* $\displaystyle\int f(x)\, dx$

Problema 1.44 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & si \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Estudiar la continuidad de f.*

b) *(1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.*

c) *(1 punto) Calcular la integral:* $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Problema 1.45 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+4}$, *se pide:*

a) *(1 punto) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.*

c) *(1 punto) Calcular* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Problema 1.46 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5senx}{2x} + \dfrac{1}{2} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

se pide:

a) *(1 punto) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.*

b) *(1 punto) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.*

c) *(1 punto) Calcular la integral:* $\displaystyle\int_1^{Ln5} f(x)\,dx$

Problema 1.47 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar el dominio de $f(x)$.*

b) *(1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

c) *(1 punto) El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abcisas y las rectas $x = \pm\frac{1}{2}$.*

Problema 1.48 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.*

b) (1 punto) Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.

c) (1 punto) En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Problema 1.49 *(3 puntos) Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:*

a) (1 punto) Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$

c) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

Problema 1.50 *(2 puntos) Calcular:*

a) (1 punto) $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{Lnx}\right)$

Problema 1.51 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abcisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar: $f(-2)$, $f'(-2)$ y $f''(-2)$.

b) (1 punto) Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

Problema 1.52 *(2 puntos) Calcular justificadamente:*

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-2x-e^x+sen3x}{x^2}$

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Problema 1.53 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} a + Ln(1-x) & si \quad x < 0 \\ x^2e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$
se pide:

a) *(1 punto) Calcular* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) *(1 punto) Calcular el valor de* a*, para que* $f(x)$ *sea continua en todo* $\mathbb{R}$*.*

c) *(1 punto) Estudiar la derivabilidad de* f *y calcular* f'*, donde sea posible.*

Problema 1.54 *(2 puntos) Calcular los siguientes límites:*

a) *(1 punto)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{arctgx - x}{x^3}$

b) *(1 punto)* $\lim_{x\to 0} (1 - senx)^{\frac{1}{x}}$

Problema 1.55 *(2 puntos)*

a) *(1 punto) Sea* $g(x)$ *una función derivable que cumple* $g(6) = \displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$*.*
Hallar: $\displaystyle\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx$

b) *(1 punto) Sea* $f(x)\cdot$ *una función continua que verifica* $\displaystyle\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$*.*
Hallar: $\displaystyle\int_0^2 f(e^{\frac{x}{2}})e^{\frac{x}{2}}\,du$

Problema 1.56 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & si \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

se pide:

a) *(0,75 puntos) Estudiar lsu continuidad.*

b) *(1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.*

c) *(1,25 puntos) Hallar los extremos relativos y esbozar su gráfica.*

Problema 1.57 *(2 puntos) Dada la función:* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *se pide:*

a) *(1,5 puntos) Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abcisa $x = \frac{2}{3}$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.*

b) *(0,5 puntos) ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?*

Problema 1.58 *(2 puntos) Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25 & si \quad x \leq 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & si \quad 1 < x < 2 \\ \dfrac{5Ln(1+x^2)}{Ln5} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

se pide:

a) *(1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.*

b) *(1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.*

Problema 1.59 *(3 puntos) Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha}{x^2 + 1}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.*

b) *(0,5 puntos) Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.*

c) *(1,5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.*

Problema 1.60 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{4}{x-4} + \dfrac{27}{2x+2}$ *se pide:*

a) *(0,75 puntos) Hallar las asíntotas de su gráfica.*

b) *(1,75 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.*

c) *(0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.*

Problema 1.61 *(2 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$*

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 xfx\,dx$

Problema 1.62 *(2 puntos) Dada la función:* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ *se pide:*

a) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) (1 punto) Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Problema 1.63 *(2 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} a & si \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ *se pide:*

a) (1 punto) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en ese caso, la derivavilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular, en función de a, la integral $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Problema 1.64 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & si \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{Ln(x+1)}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

c) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

Problema 1.65 *(2 puntos) Calcula las siguientes integrales:*

a) (1 punto) $\int \dfrac{x-3}{x^2+9}\,dx$

b) (1 punto) $\int \dfrac{3 - x^2 + x^4}{x^3}\,dx$

Problema 1.66 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = 2cos^2x$, *se pide:*

a) *(1 punto) Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*

b) *(1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*

c) *(1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$*

Problema 1.67 *(2 puntos) Dada la función: $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:*

a) *(1 punto) Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.*

b) *(1 punto) Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.*

Problema 1.68 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & si \quad x > 0 \end{cases}$,

se pide:

a) *(1 punto) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.*

b) *(1 punto) Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.*

c) *(1 punto) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.*

Problema 1.69 *(3 puntos)*

a) *(0,5 puntos) Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = Lnx$ y el eje OX entre las abcisas $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.*

b) *(1,25 puntos) Calcular el área de dicho recinto.*

c) *(1,25 puntos) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.*

Problema 1.70 *(2 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide:*

a) *(1 punto) Hallar las asíntotas de su gráfica.*

b) *(1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$.*

Problema 1.71 *(2 puntos)*

a) *(1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar: $\displaystyle\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$*

b) *(1 punto) Hallar el dominio de definición y las abcisas de los puntos donde la función $F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$ alcanza sus máximos y mínimos relativos.*

Problema 1.72 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x + A & si & x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & si & x > 3 \end{array}\right.$, *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?*

b) *(1 punto) Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.*

c) *(1 punto) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.*

Problema 1.73 *(3 puntos) Dada la función: $f(x) = x^2 sen x$, se pide:*

a) *(1 punto) Determinar, justificando la respuesta si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.*

b) *(1 punto) Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$*

c) *(1 punto) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.*

Problema 1.74 *(3 puntos) Dadas las funciones:*

$$f(x) = \frac{3x + Ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}},\ g(x) = (Lnx)^x,\ h(x) = sen(\pi - x),\ \textit{se pide:}$$

a) *(1 punto) Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.*

b) *(1 punto) Calcular $g'(e)$.*

c) *(1 punto) Calcular en el intervalo $(0, 2\pi)$ las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abcisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.*

Problema 1.75 *(3 puntos) Dada la función $f(x) = cos^2 x$, se pide:*

a) *(1 punto) Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.*

b) *(1 punto) Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.*

c) *(1 punto) Hallar la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(\frac{\pi}{4}) = 0$*

Problema 1.76 *(2 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$, se pide:*

a) *(1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$*

b) *(1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$*

Problema 1.77 *(2 puntos) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, abtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:*

- *El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abcisas $x = \frac{-1}{3}$, $x = -1$.*
- *La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.*

Problema 1.78 *(3 puntos) Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$ y además que: $F(2) = 1$, $F(3) = 2$, $F(4) = 6$, $F(5) = 3$, $f(3) = 3$ y $f(4) = -1$. Hallar:*

a) *(0,5 puntos)* $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) *(1 punto)* $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) *(1,5 puntos)* $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$

Problema 1.79 *(2 puntos) Hallar a. b, y c de modo que la función* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *alcance en* $x = 1$ *un máximo relativo de valor 2 y tenga en* $x = 3$ *un punto de inflexión.*

Problema 1.80 *(2 puntos) Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:*

a) (1 punto) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x} cosx\, dx$

b) (1 punto) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen2x}{1 + cos^2 2x}\, dx$

Problema 1.81 *(3 puntos) Se pide:*

a) (1 punto) Calcular los límites: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$

b) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2}\, dx$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. *Hallar el conjunto de los puntos en los que la función* f *tiene derivada.*

Problema 1.82 *(2 puntos)Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ k & si \quad x = 0 \\ \dfrac{cosx - 1}{senx} & si \quad x > 0 \end{cases}$

Hallar el valor de k *para que* f *sea continua en* $x = 0$. *Justificar la respuesta.*

Problema 1.83 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -senx$ *y el eje OX entre las abcisas* $x = 0$ *y* $x = 2\pi$.

b) (1 punto) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -senx$ *alrededor del eje OX entre las abcisas* $x = 0$ *y* $x = 2\pi$.

Problema 1.84 *(2 puntos) Halla el valor de* λ *para que la función:*

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & si \quad x > 0 \\ \dfrac{sen2x}{x} & si \quad x \le 0 \end{cases}$ *sea continua. Razonar la respuesta.*

Problema 1.85 *(2 puntos) Dada la función* $f(x) = \frac{1}{2} - senx$*, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de* f*, el eje* OX *y las rectas* $x = 0$*,* $x = \frac{\pi}{2}$

Problema 1.86 *(2 puntos) Se pide:*

a) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$

b) (1 punto) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$

Problema 1.87 *(2 puntos) Se pide:*

a) (1 punto) Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

b) (1 punto) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ *solo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas usas.*

Problema 1.88 *(2 puntos) Hallar:*

a) (0,5 puntos) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x-15)^8\,dx$

b) (1,5 puntos) $\displaystyle\int_{9}^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx$

Problema 1.89 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}$*, se pide:*

a) (1,5 puntos) Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.

Problema 1.90 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$*, se pide:*

a) (1,5 puntos) Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas.

b) (1,5 puntos) Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$. $x = 3$.

Problema 1.91 *(2 puntos) Calcular los límites:*

a) (1 punto) $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

b) (1 punto) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{x}$

Problema 1.92 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3}$*, se pide:*

a) (1 punto) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en los que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) (1 punto) Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Problema 1.93 *(2 puntos) Dada la función $f(x) = Ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide:*

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(X)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto) los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Problema 1.94 *(3 puntos) Dadas las funciones: $y = 9 - x^2$, $y = 2x + 1$, se pide:*

a) (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Problema 1.95 *(2 puntos) Calcular los límites:*

a) (1 punto) $\lim_{x\to 0}(1 + arctgx)^{\frac{a}{x}}$

b) *(1 punto)* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$

Problema 1.96 *(2 puntos) Calcular los límites:*

a) *(1 punto)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) *(1 punto)* $\displaystyle\int_0^\pi x cos x\,dx$

Problema 1.97 *(2 puntos)*

Obtener el valor de a para que: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = 4$

Problema 1.98 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = e^x + ae^{-x}$, *siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:*

a) *(1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

b) *(1 punto) Estudiar para que valor o valores de a la función* f *tiene alguna asíntota horizontal.*

c) *(0,5 puntos) Para* $a \geq 0$, *hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de* f, *el eje OX y las rectas* $x = 0$, $x = 2$.

Problema 1.99 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = x^3 - x$, *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(-1, f(-1))$

b) *(1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de* f.

c) *(1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de* f *y la recta obtenida en el apartado anterior.*

Problema 1.100 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, *se pide:*

a) *(0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Hallar las aíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Problema 1.101 *(3 puntos) Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}Lnx}{2^x} & si \quad x > 0 \\ x + k & si \quad x \le 0 \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = 1$.

Problema 1.102 *(2 puntos)*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x}\right]^{25}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 4x^3)^{\frac{2}{x^3}}$