Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Matrices

Definición 1.1 *Una matriz de m filas y n columnas es un conjunto de elementos dispuestos de la siguiente manera:*

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Donde a $m \times n$ se le denomina dimensión de la matriz.

Dentro de una matriz hablamos de diagonales principal y secundaria:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Diagonal principal}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Diagonal secundaria}$$

1.1.1. Clasificación de matrices

A) Según la forma:

- Matriz fila: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
- Matriz columna: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Matriz cuadrada ($m = n$): $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
- Matriz rectangular ($m \neq n$): $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$
- Matriz traspuesta: Cambia filas por columnas:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

  La matriz traspuesta cumple una propiedad muy útil (PAU):
  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- Matriz simétrica: Matriz cuadrada que coincide con su traspuesta. $A = A^t \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Matriz antisimétrica: Matriz cuadrada en la que $a_{ij} = -a_{ji}$
  (Y por tanto de diagonal principal igual a 0).

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

B) Según sus elementos:

- Matriz nula: Todos los elementos son 0. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Matriz identidad o unidad: Los elementos de la diagonal principal son 1 y los demás son 0. Se denotan por I_n, donde n es el número de filas (o columnas).

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular: Matriz cuadrada en la que los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ T. superior} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ T. inferior}$$

1.1.2. Operaciones con matrices

A) Suma y resta:

- Se pueden operar, de seguido, tantas matrices como se quiera.

- Todas deben tener la misma dimensión.

- El resultado de una suma de matrices es una matriz con la misma dimensión que éstas y cuyos elementos son el resultado de la suma de los elementos que ocupan la misma posición en las matrices sumando.

Ejemplo 1.1 *Suma de matrices*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 & 3+2 \\ 0+2 & -1-1 & 2+3 \\ 4+0 & 5-1 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2 *Suma de matrices*

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\12 & 4\end{pmatrix}$$

De lo que se deduce que si $k \in \mathbb{R}$ *entonces:*

$$k\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\cdot a & k\cdot b & k\cdot c\\k\cdot d & k\cdot e & k\cdot f\\k\cdot g & k\cdot h & k\cdot i\end{pmatrix}$$

B) Producto:

- Solo se pueden multiplicar de 2 en 2.
- NO CUMPLE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA. $A\cdot B \neq B\cdot A$
- El número de columnas de la primera matriz ha de ser igual al número de filas de la segunda y el resultado será una matriz que tendrá las filas de la primera y las columnas de la segunda.

$$A_{m\times\boxed{p}}\cdot B_{\boxed{p}\times n}=\mathbb{C}_{m\times n}$$

- Se multiplican filas por columnas

Ejemplo 1.3 *Sean* $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 4\\2 & -2\end{pmatrix}$

Calcular $A\cdot B$ *y* $B\cdot A$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 4\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0+1\cdot 3+5\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 4+5\cdot(-2)\\-1\cdot 0+1\cdot 3+0\cdot 2 & -1\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -4\\3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 4\\2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 5+1\cdot 0\\3\cdot 2+4\cdot(-1) & 3\cdot 1+4\cdot 1 & 3\cdot 5+4\cdot 0\\2\cdot 2+(-2)\cdot(-1) & 2\cdot 1+(-2)\cdot 1 & 2\cdot 5+(-2)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\2 & 7 & 15\\6 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

C) Potencias:

- Se harán como productos sucesivos (que es lo que hacemos con los números)
- Si el exponente es muy grande suele ocurrir que hay una recurrencia en las sucesivas potencias (ver ejemplo) lo que simplifica enormemente el cálculo.

Ejemplo 1.4 *Calcula A^2, A^3, A^4 y A^{1000} siendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot A = A^2$$

$$A^6 = A \cdot A^5 = A \cdot A^2 = A^3, \ etc$$

Se ve entonces que cada tres potencias consecutivas se vuelve a repetir la secuencia. Como 1000 dividido entre tres da de resto 1, eso quiere decir que $A^{1000} = A^1$ y por tanto:

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1.1.3. Rango de una matriz

Definición 1.2 *Rango de una matriz*

El rango de una matriz es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes. Como máximo una matriz tendrá de rango el menor número de entre su número de filas y su número de columnas.

Una línea es linealmente dependiente de otra o de otras cuando se puede obtener como una combinación lineal de ellas (y linealmente independiente cuando no).

Una combinación lineal de lineas es la suma (resta) de varias de ellas multiplicadas por escalares.

Al igual que con el cálculo de la matriz inversa existen dos métodos diferentes para calcular el rango de una matriz. El denominado también método de Gauss y otro método para el cual se necesitan los determinantes. El segundo método resulta normalmente más sencillo.

Ejemplo 1.5 *Cálculo del rango de una matriz mediante el método de Gauss.*

Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) La estrategia es triangular la matriz superiormente (hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal principal) que una vez más es lo mismo que hacíamos cuando resolvíamos sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

b) El rango de la matriz será el número de filas cuyos elementos no sean todo ceros al final del proceso.

Es MUY IMPORTANTE saber que durante el cálculo de el rango de una matriz mediante este método podemos eliminar una fila si cumple las siguientes condiciones:

- *Todos sus elementos son ceros.*
- *Hay dos líneas iguales (al restarle a una la otra me saldrá una fila de ceros).*

- *Es proporcional a otra (podré igualmente hacer que todos sus elementos sean 0).*

- *Una línea es combinación lineal de otras (esto es difícil de ver a ojo, pero como en los dos casos anteriores no pasa nada si no se ve, porque al hacer los cálculos pertinentes me saldrá la fila con todos sus elementos iguales a 0).*

En la matriz A *se observa fácilmente que la fila* 4 *está compuesta únicamente de ceros. Así que para el cálculo del rango la podré eliminar. También es fácil ver que* $F_3 = 2 \cdot F_1$. *Así que nada más empezar eliminaré esas dos filas (pero OJO, esto es solo para calcular su rango, la matriz* A *contiene a esas dos filas y si tengo que hacer algún cálculo con ella deberé utilizarlas).*

Podríamos observar también que $F_5 = 2F_2 + F_1$ *(*F_5 *es una combinación lineal de* F_1 *y* F_2*) y entonces podríamos eliminar la fila 5, pero esto es difícil de ver y no es necesario porque al triangular la matriz la fila 5 acabará estando compuesta únicamente por ceros.*

$$rango(A) = rango \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-5F_1]{F_2=F_2-2F_1} = rango \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -6 & 4 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3-2F_2}) = rango \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos acabado de triangular la matriz (TODOS los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros) (NOTA: OJO con las diagonales en las matrices que no son cuadradas).

El número de filas distintas de cero es de 2, *así que el rango de la matriz es* 2

1.1.4. Matriz inversa

Definición 1.3 *Matriz inversa*

Dada una matriz A se denomina matriz inversa de A y se denota por A^{-1} a aquella matriz que cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Siendo I la matriz identidad del mismo orden que A.

NOTA: Solo las matrices CUADRADAS tienen inversa.

NOTA: Solo las matrices con rango máximo tienen inversa.

NOTA: Se trata de la inversa multiplicativa. En los números, el inverso multiplicativo de 2 es $\frac{1}{2}$, ya que $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, siendo 1 el elemento neutro respecto de la multiplicación. En las matrices, la matriz identidad es el elemento neutro de la multiplicación ya que $A \cdot I = A$

Existen dos métodos para calcular la matriz inversa de una matriz. El denominado método de GAUSS y otro en el que hacen falta los determinantes que se verán posteriormente. En la gran mayoría de los casos el segundo método es más rápido y sencillo salvo que la matríz de la que nos piden calcular la inversa sea una matriz con muchos ceros (similares a la matriz identidad).

Ejemplo 1.6 *Cálculo de la matriz inversa mediante el método de Gauss.*

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *calcula su matriz inversa* A^{-1}

a) La ampliamos poniendo a su derecha la matriz identidad de la misma dimensión:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b) El objetivo es obtener a la izquierda la matriz identidad utilizando las mismas estrategias que utilizábamos para resolver sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss (entonces queríamos hacer ceros debajo de la diagonal principal, ahora hay más trabajo porque queremos ceros también por encima y que la diagonal principal sean unos). La matriz que quede a la derecha al final del proceso resultará ser la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=-1\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la matriz inversa de A, A^{-1} *es* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resulta muy sencillo comprobar si el cálculo de la matriz inversa se ha efectuado correctamente. Para ello basta multiplicar $A \cdot A^{-1}$ *y comprobar que el resultado es la matriz identidad.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{Q.E.D.}$$

1.1.5. Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial no es más que una ecuación en la que intervienen matrices. Para su resolución es MUY IMPORTANTE recordar que el producto matricial no es conmutativo, y por tanto hay que tener mucho cuidado a la hora de multiplicar matrices.

Otro punto MUY IMPORTANTE es que no hemos definido la división entre matrices, y por tanto para conseguir lo que conseguimos con la división lo que haremos será multiplicar por el inverso multiplicativo de una matriz (su matriz inversa).

Ejemplo 1.7 *Despeja X de la ecuación matricial $A \cdot X = B$*

a) Como no hemos visto la división de matrices no podemos coger esa matriz A y pasarla al otro lado dividiendo. Lo que haremos será multiplicar a ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de la matriz A, que es su matriz inversa A^{-1}.

Imaginemos que la ecuación fuese normal: $2x = 8$

a) *Multiplicamos a ambos lado por el inverso multiplicativo de 2:*

   $$2x = 8 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x = 8 \cdot \frac{1}{2}$$

b) *Un número multiplicado por su inverso multiplicativo da el neutro de la multiplicación (el 1)*

   $$1 \cdot x = \frac{8}{2}$$

c) *El neutro de la multiplicación es el que multiplicado por cualquier número da ese número:*

   $x = 4$.

NOTA: OJO!!!!. En este ejemplo en el paso a) hemos multiplicado en el primer miembro por $\frac{1}{2}$ a la izquierda, sin embargo, en el segundo miembro hemos multiplicado por $\frac{1}{2}$ a la derecha. Eso aquí da igual *porque los números cumplen la propiedad conmutativa respecto de la multiplicación, pero con matrices ESO NO SE PUEDE HACER.*

Vemos el mismo ejemplo con matrices. $A \cdot X = B$

a) Multiplicamos a ambos lado por el inverso multiplicativo de A *(su matriz inversa):*

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = B \cdot A^{-1} \qquad \textit{MAL!!!!!!}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \qquad \textit{BIEN!!!!!}$$

b) Una matriz multiplicada por su inverso multiplicativo da el neutro de la multiplicación (la matriz identidad)

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

c) El neutro de la multiplicación es el que multiplicado por una matriz es el que da como resultado esa misma matriz:

$X = A^{-1} \cdot B.$

d) Como sabemos calcular matrices inversas lo que tendremos que hacer para calcular el valor de la matriz X *es realizar la multiplicación* $A^{-1} \cdot B$

Ejemplo 1.8 *Obtener* X *tal que* $AX = B$ *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo primero es despejar la matriz que nos piden:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Así que tenemos que calcular la matriz inversa de A *y luego multiplicarle esa matriz por la izquierda a la matriz* B.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = X$$

Esta clase de ejercicios se podría resolver utilizando simplemente la multiplicación de matrices y resolviendo el sistema resultante. Veamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como sabemos multiplicar matrices lo hacemos y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d-g & e-h & f-i \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, para que esas dos matrices sean iguales lo tendrán que ser todos sus elementos. Lo igualamos y resolvemos el sistema resultante.

$$\begin{cases} a+d=0 \\ d-g=1 \\ 2d+g=1 \\ b+e=1 \\ e-h=0 \\ 2e+h=-1 \\ c+f=-1 \\ f-i=1 \\ 2f+i=0 \end{cases}$$

Aunque el sistema pueda parecer difícil en realidad no se tarda tanto en resolver y una vez hecho se tiene la matriz X que se buscaba. De todos modos este método casi nunca se usa salvo para matrices cuadradas de orden 2.

1.2. Determinantes

- Un determinante es un escalar
- Se obtiene a partir de una matriz cuadrada (se habla de determinante asociado a una determinada matriz)

1.2.1. Cálculo de determinantes

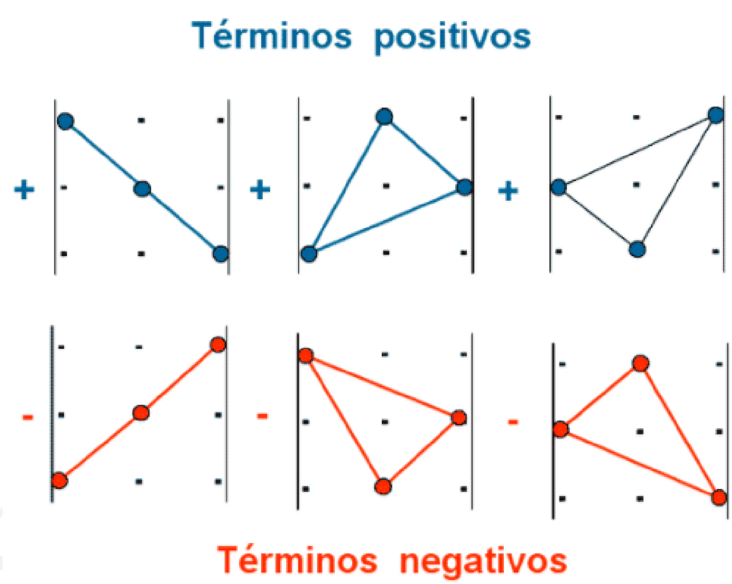
Vemos cómo se calculan en función de su orden. Como están asociados a matrices cuadradas solo se utiliza un número para expresar su orden.

ORDEN 2

Elementos de la diagonal principal multiplicados menos los de la diagonal secundaria multiplicados.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - (-4) \cdot 2 = 2$$

ORDEN 3 (Regla de Sarrus)



$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3{\cdot}4{\cdot}(-3)+5{\cdot}(-1){\cdot}1+2{\cdot}2{\cdot}0-1{\cdot}4{\cdot}2-0{\cdot}(-1){\cdot}3-(-3){\cdot}2{\cdot}5 = -19$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6+8+8+9 = 19 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24+0+0-0-0-0 = 24$$

ORDEN 4 o superior

- Se elige una fila o una columna (la que más ceros contenga)

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \text{Elegimos la } 1^{\text{a}} \text{ columna}$$

- Se multiplica cada elemento de esa fila por el determinante que queda al eliminar la fila y la columna de ese elemento. (A esos determinantes se los llama ADJUNTOS de cada uno de los elementos).

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

- Cada uno de los productos anteriores irá precedido de un signo $+$ o de un signo $-$ en función de la posición de los elementos que fui usando. Si la suma de sus subíndices es par tendrá un signo $+$. Si esa suma es impar ira precedido por el signo $-$. Otra forma de ver esto es simplemente recordando la matriz de signos siguiente:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix}2&3&1\\4&3&2\\-1&3&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}7&2&3\\4&3&2\\-1&3&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}7&2&3\\2&3&1\\-1&3&1\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}7&2&3\\2&3&1\\4&3&2\end{vmatrix}=$$

- Ya sabemos calcular determinantes de orden 3, y por tanto:

$$-39-0+268-145=60$$

NOTA: Existe otro método para calcular determinantes de orden superior a 3 que es en realidad una mejora de este último y se conoce como el método de CHIO. Para su uso hay que conocer primero las propiedades de los determinantes.

1.2.2. Propiedades de los determinantes

a) $$\begin{vmatrix}a+a'&b+b'&c+c'\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'&b'&c'\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$$

También vale para columnas

Ej: $$\begin{vmatrix}2&3+A&1\\1&5-B&1\\3&7+C&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&5&1\\3&7&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&A&1\\1&-B&1\\3&C&2\end{vmatrix}$$

Ej: $$\begin{vmatrix}4-2&3+a&1\\1+0&5-b&1\\2+1&7+c&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&1\\1&5&1\\2&7&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&a&1\\0&-b&1\\1&c&2\end{vmatrix}\longrightarrow \text{MAL}$$

$$=\begin{vmatrix}4&3+a&1\\1&5-b&1\\2&7+c&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&3+a&1\\0&5-b&1\\1&7+c&2\end{vmatrix}\longrightarrow \text{BIEN}$$

b) $$k\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$$

Solo se multiplica una fila o una columna

$$\text{Ej: } 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 7 & 2\\ 4 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 7 & 2\\ 8 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 14 & 4\\ 4 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix} = ...$$

c) $det(A\cdot B) = detA\cdot det(B) \longrightarrow |A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

d) Si permutamos 2 filas o 2 columnas, el signo del determinante cambia:

$$\text{Ej: } \begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 9\\ -3 & 3 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 9 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

e) Si todos los elementos de una fila o columna son 0 $\longrightarrow$ el determinante vale 0

f) Si dos filas o columnas valen 0 $\longrightarrow$ el determinante vale 0.

g) Si dos filas o columnas son proporcionales $\longrightarrow$ el determinante vale 0.

$$\text{Ej: } \begin{vmatrix}a & b & c\\ ax & bx & cx\\ d & e & f\end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} = 0$$

h) Si una fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas) $\longrightarrow$ el determinante vale 0.

$$\text{Ej: } \begin{vmatrix}a & b & c\\ f & g & h\\ xa+yf & xb+yg & xc+yh\end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix}a & b & c\\ f & g & h\\ a & b & c\end{vmatrix} + y\cdot\begin{vmatrix}a & b & c\\ f & g & h\\ f & g & h\end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Ej: } \begin{vmatrix}2 & 1 & 7\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 9\end{vmatrix} = 0 \qquad F_3 = F_1 + F_2$$

$$\text{Ej: } \begin{vmatrix}2 & 1 & 7\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & -13 & 13\end{vmatrix} = 0 \qquad F_3 = 3\cdot F_1 - 4\cdot F_2$$

i) Si a una fila o columna se le suma otras paralelas multiplicada por un número $\longrightarrow$ el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+ax & h+bx & i+cx \end{vmatrix}$$

Ej: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} \qquad C_3 = C_3 + C_2$

Ej: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} \qquad F_3 = F_3 + F_2$

OBS: La fila que se cambia ha de salir en la combinación y sin multiplicar.

Una vez vistas las propiedades de los determinantes, en especial esta última, vamos a ver otro método para calcular determinantes de orden superior a 3.

MÉTODO DE CHIO

Como sabemos por la última propiedad que un determinante no varía si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, antes de utilizar el método visto anteriormente haremos ceros en la fila a columna por la que vayamos a desarrollar. Vemos el mismo ejemplo que antes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \text{Elegimos la } 1^{\text{a}} \text{ columna}$$

Aplicando la última propiedad de los determinantes vamos a hacer 0 todos los elementos de esa columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4=F_4-5F_1]{F_3=F_3-4F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -24 & -5 & -10 \\ 0 & -36 & -7 & -14 \end{vmatrix}$$

Ahora, al desarrollar por la primera columna todos los adjuntos correspondientes estarán multiplicados por 0 salvo el primero, así que el determinante resultante es:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -24 & -5 & -10 \\ -36 & -7 & -14 \end{vmatrix} = 60$$

1.2.3. Rango de una matriz con determinantes

El rango de una matriz ya se ha definido en secciones anteriores y se vio el método de Gauss para calcularlo. Hay un método basado en los determinantes que facilita mucho el cálculo. Se procede de la siguiente forma:

- Buscamos el mayor determinante distinto de 0 que podamos encontrar en la matriz (si la matriz es cuadrada el determinante más grande tendrá la misma dimensión que la matriz).
- El rango de la matriz será el número de filas (o columnas) que tenga dicho determinante.

Ej 1: Determina el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$, ya que A tiene dos filas iguales $\Rightarrow RgA < 3$.

Buscamos un determinante de orden 2 distinto de 0.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$

Ej 2: Determina el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|B| \neq 0 \Rightarrow RgA = 3$

Ej 3: Estudia el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$ en función de los valores del parámetro real p.

$$|A| = p(p+1)(p-1) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 1 \\ p = -1 \end{cases}$$

a) Caso 1: $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$

$|A| \neq 0 \Rightarrow RgA = 3$

b) Caso 2: $p = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A < 3$$

Buscamos un determinante 2x2 que se distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$$

c) Caso 3: $p = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A < 3$$

Buscamos un determinante 2x2 que se distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$$

d) Caso 4: $p = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A < 3$$

Buscamos un determinante 2x2 que se distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$$

1.2.4. Matriz inversa con determinantes

La matriz inversa ya la hemos estudiado en secciones anteriores. Ahora vamos a desarrollar un método para su cálculo basado en los determinantes que facilita mucho su consecución. Lo primero de todo es recordar que:

- Para que una matriz tenga inversa tiene que ser CUADRADA.
- La matriz en cuestión tiene que tener rango máximo. Como acabamos de ver en el estudio del rango con determinantes se puede concluir que para que tenga inversa el determinante de la matriz debe ser distinto de 0.

$$A^{-1} = \frac{(Adj\,A)^t}{|A|}, \qquad donde$$

$Adj\,A$ =matriz de adjuntos
$(Adj\,A)^t$= matriz de adjuntos traspuesta

La matriz de adjuntos es la que se forma si a cada elemento de la matriz lo sustituimos por el valor de su determinante adjunto asociado con su correspondiente signo. (Visto en el cálculo de los determinantes de grado 4 o superior).

Ej 1: Calcula A^{-1} siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 7$

$Adj\,A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (Adj\,A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ej 2: Calcula B^{-1} siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 2$

$$Adj\,A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(Adj\,A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(Adj\,A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.3. Sistemas de ecuaciones

1.3.1. Expresión matricial

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \\ a''x + b''y + c''z & = & d'' \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

La matriz A recibe el nombre de matriz de coeficientes.
La matriz B recibe el nombre de matriz de términos independientes
Además de estas dos matrices utilizaremos con frecuencia la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & | & d \\ a' & b' & c' & | & d' \\ a'' & b'' & c'' & | & d'' \end{pmatrix} = A^* = \text{matriz ampliada del sistema.}$$

1.3.2. Clasificación de sistemas

$$\text{Sistemas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible: } \exists \text{ solución} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinado: } \exists! \text{ solución (SCD)} \\ \text{Indeterminado: } \exists \infty \text{ soluciones (SCI)} \end{array} \right. \\ \\ \text{Incompatible: no tiene solución (SI)} \end{array} \right.$$

1.3.3. Teorema de Rouché-Frobenius

Este teorema sirve para discutir sistemas de ecuaciones (que serán normalmente de 3 ecuaciones con tres incógnitas). Esto es, saber qué tipo de solución tendrán antes de resolverlo. Es especialmente de interés cuando los sistemas son dependientes de parámetros.

Caso 1: $RgA = RgA^* =$ n^o de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Caso 2: $RgA = RgA^* <$ n^o de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

Obs: El n^o de parámetros es igual al n^o de incógnitas menos el rango.

Caso 3: $RgA \neq RgA^* \Rightarrow$ S.I.

En cualquier caso: $RgA^* \geq RgA$

Ej 1: Clasifica el siguiente sistema según sus soluciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x-2y+z & = & 5 \\ 2x-3y+z & = & 4 \\ x \qquad\quad +z & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 5 \\ 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de A.

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -4 \neq 0 \Rightarrow RgA = 3 \\ \text{Como } RgA^* \geq RgA \Rightarrow RgA^* = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow RgA = RgA^* = n^o \Rightarrow S.C.D.$$

Ej 2: Clasifica el siguiente sistema según sus soluciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z & = & 1 \\ 2x+4y-2z & = & 2 \\ \qquad\quad y+z & = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de A.

$|A| = 0 \Rightarrow RgA < 3$

Buscamos un determinante 2x2 $\neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$

Ahora tenemos que estudiar el RgA^*, para ello vemos los determinantes 3x3 que podemos calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Nótese que en realidad no hace falta calcular ninguno de los determinantes porque se ve a simple vista que hay filas proporcionales en los tres, así que por las propiedades de los determinantes ya sabíamos que iban a dar 0 todos ellos.

Como todos los determinantes 3x3 son 0 $\Rightarrow RgA^* < 3$ y como $RgA^* \geq RgA \Rightarrow RgA^* = 2$

$RgA = RgA^* = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I $\Rightarrow \infty$ soluciones

1.3.4. Métodos de resolución

a) Método de Gauss

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ -x+y+z &= 1 \end{cases} \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ -2y+2z &= 0 \\ 2z &= 2 \end{cases} \longrightarrow z=1,\ y=1,\ x=1$$

b) Método de la matriz inversa

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ -x+y+z &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Tenemos por tanto que calcular la matriz inversa de la matriz A y multiplicarla por la izquierda por B.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1,\ y = 1,\ z = 1$

c) Método de Cramer

El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo su determinante asociado (es el que se obtiene sustituyendo la columna de la incógnita por la de términos independientes) entre el determinante de la matriz del sistema (Matriz A).

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 1$$

NOTA: Cuando un sistema es compatible indeterminado el rango de la matriz de coeficientes no es 3 (una de las ecuaciones sobra porque es combinación lineal de las otras). Por tanto su determinante es 0 y nótese que en el método de Cramer estamos dividiendo por el determinante de la matriz de coeficientes y de sobra sabemos que no se puede dividir por 0. ¿Se puede entonces usar este método para resolver

SCI's? Si se puede, pero primero habrá que hacer pequeños arreglos en el sistema. Una de las ecuaciones sobra, por tanto se elimina. Una de las incógnitas pasa a ser un parámetro y se pasa al otro lado de la respectivas ecuaciones. Se verá en la resolución de ejercicios de selectividad.

NOTA: Merecen especial interés los sistemas homogéneos. En ellos todos los términos independientes son 0 y por tanto $RgA = RgA^*$. Así pues son siempre S.C. El problema reside en estudiar el rango de A. Si ese rango es igual al número de incógnitas el sistema es S.C.D. y la única solución es la trivial ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). Si es menor será un S.C.I., tendrá infinitas soluciones y una de ellas será la trivial. (Ver ejercicios PAU).

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + by + cz & = & 0 \\ a'x + b'y +' cz & = & 0 \\ a''x + b''y + c''z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & | & 0 \\ a' & b' & c' & | & 0 \\ a'' & b'' & c'' & | & 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Problemas PAU

Problema 1.1 *(2,5 puntos)*

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$,

se pide:

a) *(1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.*

b) *(1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.*

Problema 1.2 *(2,5 puntos) Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.*

a) *(0,5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.*

b) *(2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.*

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Problema 1.3 *(2,5 puntos)*

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *(1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.*

b) *(0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.*

c) *(0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A*

Problema 1.4 *(2,5 puntos)*

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{lcc} kx+(k+1)y+z & = & 0 \\ -x+ky-z & = & 0 \\ (k-1)x-y & = & -(k+1) \end{array}\right.$

a) *(2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.*

b) *(0,5 puntos) Resolver el sistema para $k=-1$.*

Problema 1.5 *(2,5 puntos)*

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *(0,5 puntos) Calcular los valores de $m\in\mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.*

b) *(1 punto) Para $m=1$, calcular la inversa de la matriz B.*

c) *(1 punto) Para $m=2$, calcular la matriz producto A^tB y el determinante de la matriz A^2B.*

Problema 1.6 *(2,5 puntos) LA aerolínea -Air-, para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90% del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.*

a) *(0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.*

b) *(2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.*

Problema 1.7 *(2,5 puntos) Un estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto de sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?*

Problema 1.8 *(2,5 puntos)*

$$\text{Dadas las matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} \text{ y } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.*

b) *(1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$*

Problema 1.9 *(2,5 puntos) Para cada uno de los siguientes apartados proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3x3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes que cumpla la condición pedida.*

a) *(0,5 puntos) El determinante de A vale 0.*

b) *(0,5 puntos) El determinante de A vale 1.*

c) *(0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta.*

d) *(1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A\cdot C = C\cdot A$. Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.*

Problema 1.10 *Dado el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - my - z & = & 0 \\ mx - 4y + (6-2m)z & = & -8m \\ -x + 2y + z & = & 6 \end{array} \right. \quad \text{se pide:}$$

a) *(2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.*

b) *(0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.*

Problema 1.11 *Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes se pide:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

a) *Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.*

b) *Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.*

Problema 1.12 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *y I_3, se pide:*

a) *Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.*

b) *Calcualr la matriz inversa de $A - 2I$*

Problema 1.13 *Dado el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{lcc} x + my + & = & 1 \\ -2x - (m+1)y + z & = & -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z & = & 2+2m \end{array} \right. \quad \textit{se pide:}$$

a) *(2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.*

b) *(0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.*

Problema 1.14 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *y* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.*

b) *(1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.*

c) *(0,5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.*

Problema 1.15 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) *(0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.*

b) *(1,25 puntos) Hallar A^{-1} y resolver el sistema lineal* $A\cdot = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) *(0,75 puntos) Calcular C^2, donde $C = ABA^t$.*

Problema 1.16 *Dado el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 10x - 20y - 10z & = & 8\alpha + 44 \\ 2x - 5y + 3z & = & 4\alpha + 4 \\ 3x - 7y + 2z & = & 5\alpha + 9 \end{array} \right. \quad \textit{se pide:}$$

a) *(2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro α.*

b) *(0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $\alpha = -3$.*

Problema 1.17 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{37}{2} \\ 11 \end{pmatrix}$

a) *(1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro* α.

b) *(0,75 puntos) Para* $\alpha = 0$, *calcular, si es posible,* A^{-1}.

c) *(0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema* $AX = B$, *en el caso* $\alpha = 1$.

Problema 1.18 *(2,5 puntos) Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.*

Problema 1.19 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$ *se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:*

a) *Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible*

b) *Obtener el rango de A en fucnión de los valores del parámetro real* a.

c) *Resolver el sistema* $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *en el caso* $a = 0$.

Problema 1.20 *Dado el sistema de ecuaciones:* $\left\{ \begin{array}{lcc} x + y & = & 1 \\ \quad ty + z & = & 0 \\ x + (1+t)y + tz & = & t+1 \end{array} \right.$,

se pide:

a) *Discutirlo en función del parámetro* t.

b) *Resolverlo para* $t = 0$.

c) *Resolverlo para* $t = -1$.

Problema 1.21 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y la matriz identidad* I_3, *se pide:*

a) *Calcular la matriz* $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) *Determinar el rango de las matrices* $A - I$, $A^2 - I$ *y* $A^3 - I$.

c) *Calcular la matriz inversa de* A^6, *en caso de que exista.*

Problema 1.22 *Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.*

	Oro %	*Plata* %
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % *de plata, tomando* x *gramos de* A, y *gramos de* B *y* z *gramos de* C. *Determínense las cantidades* x, y, z.

Problema 1.23 $\left\{\begin{array}{llll} x + my + 3z & & = & 4 \\ x + y - 2z & & = & -2 \\ 3x & + (m+1)z & = & m+2 \end{array}\right.$ *se pide:*

a) *Discutirlo según los valores del parámetro real* m.

b) *Resolverlo para* $m = -3$

c) *Para cierto valor de* m, *que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con* $y = 0$. *Determinar* x *y* z *para esa solución. ¿Cuál es el valor de* m?

Problema 1.24 *Dada la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *Calcular su inversa.*

b) *Calcular la matriz B para que* $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sea solución del sistema* $A^2X = B$.

Problema 1.25 *En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.*

Problema 1.26 *Dadas las matrices* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *Determinar la matriz* P^{-1}.

b) *Determinar la matriz* B^{-1}, *inversa de la matriz* $B = P^{-1} \cdot J^{-1}$.

c) *Calcular el determinante de la matriz* A^2, *siendo* $A = PJP^{-1}$.

Problema 1.27 *Dado el sistema de ecuaciones* $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + ay + z & = & a \\ x - 4y + (a+1)z & = & 1 \\ 4y - az & = & 0 \end{array} \right.$, *se pide:*

a) *Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.*

b) *Resolverlo en el caso $a = 1$.*

c) *Resolverlo en el caso $a = 2$.*

Problema 1.28 *A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán 4 y cada lila 3?*

Problema 1.29 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

b) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

Problema 1.30 *Dado el sistema de ecuaciones siguiente:*

$$\left\{ \begin{array}{lcc} 2x + (a-1) - 2z & = & a \\ 2x + y - az & = & 2 \\ -x + y + z & = & 1 - a \end{array} \right. , \text{ se pide:}$$

a) Discutirlo según los valores de a.

b) Resolverlo cuando sea posible.

Problema 1.31 *Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros si el estudiante cursa un grado universitario, de 2000 euros si cursa formación profesional y de 1500 euros si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?*

Problema 1.32 *Haz lo que se indique:*

a) *Determinese, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:*

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) *Determinese los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde:*

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.33 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax - y + z & = & 0 \\ x + y + az & = & 0 \\ ax + 4y + 2z & = & a \end{array} \right. , \text{ se pide:}$$

a) *Discutirlo según los valores del parámetro a.*

b) *Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.*

c) *Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.*

Problema 1.34 *Dadas las matrices:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Determinar los valores del parámetro a para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.*

b) *Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.*

c) *Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.*

Problema 1.35 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + mz & = & 1 \\ x - y + 2z & = & -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z & = & 4 \end{array} \right. , \text{ se pide:}$$

a) *Discutirlo según los valores de* m.

b) *Resolverlo en el caso* $m = 0$.

c) *Resolverlo en el caso* $m = 2$.

Problema 1.36 *Haz lo que indique cada apartado:*

a) *Despeje* X *en la ecuación matricial* $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$*, siendo* A*,* B*,* C*,* D *matrices cuadradas invertibles. Exprese* X *de la forma más simple posible.*

b) *Para* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *determine la matriz* Y *tal que* $YB = A$.

Problema 1.37 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$*, donde* A^t *denota la matriz traspuesta de* A.

Problema 1.38 *Dadas las matrices:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) *Calcular el valor o valores de* λ *que hacen que el determinante de la matriz* $M - \lambda I$ *sea igual a* 0.

b) *Para* $\lambda = -1$*, resolver el sistema de ecuaciones lineales:* $(M - \lambda I)X = O$.

Problema 1.39 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+kz &=& 1\\ 2x+4y+z &=& 3\\ kx+2y-z &=& 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) *Discutirlo según los valores de k.*

b) *Resolverlo en el caso $k=2$.*

c) *Resolverlo para el caso $k=1$.*

Problema 1.40 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z &=& 1\\ (k-1)x+y+z &=& k\\ x+(k-1)y+z &=& 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) *Discutirlo según los valores de k.*

b) *Resolverlo en el caso $k=0$ y $k=1$.*

Problema 1.41 *Dadas las matrices:*

$$M=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1\\ 0 & a-2 & 1\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},\ \textit{se pide:}$$

a) *Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.*

b) *Hallar la inversa de M, para $a=2$.*

c) *Resolver el sistema homogéneo $MX=O$, para $a=1$.*

Problema 1.42 *Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB=BA$.*

Problema 1.43 *Sabiendo que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ *y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Problema 1.44 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} -mx+my+z & = & 0 \\ x-my+3z & = & 4 \\ 2x-2y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo en el caso $m=0$.

c) Resolverlo en el caso $m=2$.

Problema 1.45 *Haz en cada apartado lo que se indique:*

a) Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y & = & 5 \\ x+my & = & 7 \\ x-y & = & 4 \end{array}\right.$ *en función del parámetro* m *y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.*

b) Encontrar el valor o valores de k *que hacen incompatible el sistema:*
$\left\{\begin{array}{lcl} x-y+kz & = & 2 \\ kx-ky+4z & = & -4 \end{array}\right.$

Problema 1.46 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *Estudiar el rango de A según los valores de m e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.*

b) *Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.*

Problema 1.47 *Dadas las matrices:*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ e \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Calcular la matriz inversa de L.*

b) *Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.*

Problema 1.48 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}, \ e \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Hallar el rango de A en función de t.*

b) *Calcular t para que $det(A - tI) = 0$.*

Problema 1.49 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Calcular A^{15} y A^{20}.*

b) *Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.*

Problema 1.50 *Haz en cada apartado lo que se indique:*

a) *Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:*

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z & = & 0 \\ x - 2y + mz & = & 1 \\ 5x + my + z & = & 1 \end{cases}$$

b) *Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.*

Problema 1.51 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:* $\left\{\begin{array}{lcl} mx + y & = & 0 \\ x + my & = & 0 \\ mx + my & = & 0 \end{array}\right.$

a) *Discutirlo según los valores de m.*

b) *Resolver cuando sea compatible indeterminado.*

Problema 1.52 *Haz en cada apartado lo que se indique:*

a) *Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que:*

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que:*

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.53 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) *Estudiar el rango de A según los valores de m.*

b) *Calcular el determinante de la matriz A^{20}.*

c) *Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.*

d) *Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.*

Problema 1.54 *Estudiar el rango de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Problema 1.55 *Dada la ecuación matricial:*

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) Calcular B en el caso $a = 1$.

Problema 1.56 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema $AX = O$.

Problema 1.57 *Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:*

a) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$

b) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$

c) El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz traspuesta de B.

Problema 1.58 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ y-z & = & a \\ x+y-z & = & 3a^2 \end{array}\right.$$

a) *Discutirlo según los valores de a.*

b) *Resolverlo cuando sea posible.*

Problema 1.59 *Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide;*

a) *Expresar, en función del precio de un bolígrado, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.*

b) *Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.*

Problema 1.60 *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.*

b) *Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.*

Problema 1.61 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) *Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.*

b) *Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?*

Problema 1.62 *Sabiendo que* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1$, *calcula:*

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

Problema 1.63 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} (a+2)x+(a+1)y & = & -6 \\ x+5y & = & a \\ x+y & = & -5 \end{array}\right.$$

a) *Discutirlo según los valores de a.*

b) *Resolverlo cuando sea posible.*

Problema 1.64 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \textit{se pide:}$$

a) *Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}*

b) *Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.*

c) *Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.*

Problema 1.65 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+ay-z & = & 0 \\ 3x+2y+az & = & 0 \\ 7x+9y+9z & = & 0 \end{array}\right.,\ \textit{se pide:}$$

a) *Discutirlo según los valores de a.*

b) *Resolverlo para $a = 5$.*

Problema 1.66 *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Problema 1.67 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) *Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.*

b) *¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?*

c) *Dada la matriz* $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ *resolver la ecuación matricial $AX = B$.*

Problema 1.68 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{ \begin{array}{lcc} 2x + \lambda y + \lambda z & = & 1-\lambda \\ x + y + (\lambda-1)z & = & -2\lambda \\ (\lambda-1) + y + z & = & (\lambda-1) \end{array} \right., \text{ se pide:}$$

a) *Discutirlo según los valores de λ.*

b) *Resolverlo para $\lambda = 1$.*

c) *Resolverlo para $\lambda = -1$.*

Problema 1.69 *Dadas las matrices:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) *Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.*

b) *Resolver el sistema homogéneo* $AX = O$ *en el caso* $a = 1$.

c) *Resolver el sistema homogéneo* $AX = O$ *en el caso* $a = -1$.

Problema 1.70 *Dadas las matriz:*

$$\begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Determinar* λ *para que* A *sea invertible.*

b) *Calcular* A^{-1} *en el caso* $\lambda = 1$

Problema 1.71 *Sean* A *y* B *matrices con determinantes:* $detA = 5$, $detB = 3$. *Se pide:*

a) *Hallar* $det\,[B^{-1}A^2B^2]$

b) *Hallar* $det\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$

c) *Si* c_1 *y* c_2 *son las columnas de la matriz* $A = (c_1, c_2)$, *hallar la solución del sistema:*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2).$$

Problema 1.72 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + 2y - 3z & = & 2\lambda \\ x + y + z & = & 1 \\ 2x - 3y + 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

a) *Discutirlo según los valores de* λ-

b) *Para los valores de* λ *tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de* λ.

Problema 1.73 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) *Hallar el valor de* λ *para el cual la ecuación matricial* $XA = B$ *tiene solución única.*

b) *Calcular la matriz* X *para* $\lambda = 4$.

c) *Calcular el determinante de la matriz* A^2B *en función de* λ.

Problema 1.74 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z & = & 0 \\ x + ay + z & = & 3 \\ \quad y + z & = & -2 \end{cases}$$

a) *Discutirlo según los valores de* a.

b) *Resolverlo en el caso* $a = 4$.

c) *Resolverlo en el caso* $a = 2$.

Problema 1.75 *De las matrices cuadradas* A *y* B *se sabe que:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Calcular la matriz* $A - B$.

b) *Calcular las matrices* A *y* B.

Problema 1.76 *Haz en cada apartado lo que se indique:*

a) *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *y la matriz* $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *obtener las relaciones que deben cumplir* x, y, z, t *para que la matriz* X *verifique* $AX = XA$.

b) *Dar un ejemplo de matriz* X *distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.*

c) *Calcular la inversa de la matriz* A.

Problema 1.77 *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{lll} x+2y+(m+3)z & = & 3 \\ x+y+(4+m-m^2)z & = & 3 \\ 2x+4y+3(m+2) & = & 8 \end{array}\right.$$

a) Discutirlo según los valores de m.

b) Resolverlo en el caso $m = 2$.

Problema 1.78 *Calcula el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Problema 1.79 *Sabiendo que* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, *calcula:*

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Problema 1.80 *Dada la matriz:*

$$\begin{pmatrix} senx & cosx & 0 \\ cosx & -senx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) Calcular el determinante de la matriz M.

b) Hallar la matriz M^2.

c) Hallarla matriz M^{25}.

Problema 1.81 *Calcular el rango de la matriz:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$

según los valores del parámetro a.

Problema 1.82 *Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos los siguiente:*

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los cosios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Problema 1.83 *Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.*

Problema 1.84 *Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando para ello un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta 50 euros y el de un edredón 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel?*

Problema 1.85 *Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas* *de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. LA empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?*

Problema 1.86 *Un agricultor tiene repartidas 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?*

Problema 1.87 *Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.*

Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Problema 1.88 *Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros.*

Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dolar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.